

Федеральное государственное учреждение  
«Федеральный исследовательский центр  
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша  
Российской академии наук»

---

**М. Б. Гавриков**

# **ДВУХЖИДКОСТНАЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА**

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
«НАУКА»  
МОСКВА  
1988



**URSS  
МОСКВА**



*Настоящее издание осуществлено при финансовой поддержке  
Российского фонда фундаментальных исследований  
(проект № 18-11-00023), не подлежит продаже*

**Гавриков Михаил Борисович**

**Двухжидкостная электромагнитная гидродинамика.** — М.: КРАСАНД, 2018. — 584 с.

В монографии впервые в мировой литературе систематически изложена теория электромагнитной гидродинамики (ЭМГД) и ее приложения к расчету ряда установок и анализу природных явлений. Электромагнитная гидродинамика является теоретической основой исследования двухжидкостных эффектов в ионизованном газе, образующем квазинейтральную плазму. В отличие от известных магнитогидродинамических (МГД) моделей (классическая и холловская МГД, двухтемпературная и несжимаемая МГД, гибридная МГД и пр.), электромагнитная гидродинамика в полном объеме в гидродинамическом приближении учитывает электрон-ионную структуру плазмы, в том числе инерцию электронов и ионов и их взаимодействие. ЭМГД включает в себя в качестве предельного случая магнитогидродинамическое описание плазмы и приводит к существенному уточнению известных результатов МГД-теории. В то же время ЭМГД-теория позволяет получить принципиально недостижимые в МГД результаты и вводит в научную практику новые уравнения и постановки задач, представляющие значительный интерес для математики и механики сплошных сред. Читателю предлагается работоспособная теоретическая конструкция значительно более высокого уровня сложности, чем традиционная МГД, позволяющая исследовать тонкие эффекты динамики ионизованного газа и открывающая широкое поле деятельности для исследователей.

В рамках ЭМГД-теории в монографии рассмотрены как традиционные разделы плазмодинамики — акустика однородной плазмы, течения в плоских каналах и круглой трубе, возбуждение плазмы токами, ускорение плазмы в каналах, нелинейные бегущие волны, так и более сложные вопросы — расчет равновесных конфигураций плазмы в магнитных ловушках, нелинейное поглощение альфвеновских волн диссипативной плазмой, разрывные и автомодельные решения ЭМГД-уравнений.

Книга представляет интерес для специалистов по математической физике и плазмодинамике. Она доступна студентам старших курсов, аспирантам, научным работникам и преподавателям, занимающихся математическим моделированием и расчетами процессов в сплошных средах.

Издательство «КРАСАНД». 117335, Москва, Нахимовский пр-т, 56.

Формат 70×100/16. Тираж 300 экз. Уч.-изд. л. 46. Зак. № 133684

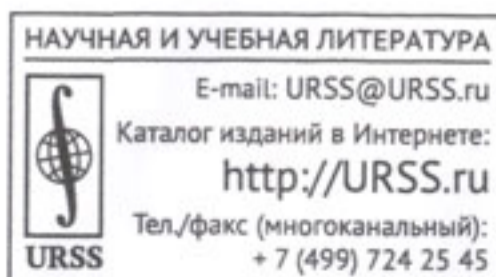
Отпечатано в АО «Т 8 Издательские Технологии».

109316, Москва, Волгоградский проспект, д. 42, корп. 5.

ISBN 978-5-396-00886-1

© КРАСАНД, 2018

23627 ID 241371



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

# Оглавление

Предисловие . . . . .	7
Введение . . . . .	9
1. Общие положения . . . . .	9
2. О чем эта книга . . . . .	9
3. Что такое плазма . . . . .	10
4. Классическая МГД-теория . . . . .	11
5. ЭМГД-теория. . . . .	13
6. Общий взгляд на содержание книги. . . . .	19
7. Краткое содержание параграфов . . . . .	20
8. Рекомендации читателю. . . . .	34
<b>Глава 1. Электродинамика Максвелла . . . . .</b>	<b>35</b>
1.1. Уравнения электродинамики Максвелла . . . . .	35
1.2. Интегральные законы электродинамики . . . . .	38
1.3. Движение заряженной частицы в электромагнитном поле . . . . .	41
<b>Глава 2. Классическая МГД . . . . .</b>	<b>47</b>
2.1. Уравнения идеальной классической МГД. . . . .	48
2.2. Гиперболичность системы уравнений классической МГД. . . . .	49
2.3. «Вмороженность» силовых линий магнитного поля в движущуюся плазму . . . . .	56
2.4. Акустика однородной МГД. . . . .	60
2.5. Однородные деформации в классической МГД. . . . .	63
2.6. Равновесные конфигурации и уравнение Грэда—Шафранова . . . . .	65
2.7. Альфвеновские волны в МГД. . . . .	67
2.8. Уравнения классической МГД с учетом диссипаций . . . . .	67
2.9. Течение Гартмана . . . . .	69
<b>Глава 3. Вывод уравнений электромагнитной гидродинамики плазмы . . . . .</b>	<b>71</b>
3.1. Исходные уравнения . . . . .	71
3.2. Вывод ЭМГД-уравнений . . . . .	74
3.3. Замечания и комментарии . . . . .	77
<b>Глава 4. Предел классической МГД . . . . .</b>	<b>81</b>
4.1. Термодинамика классической МГД. . . . .	81
4.2. МГД-предел . . . . .	85
4.3. Замечания и комментарии . . . . .	90
<b>Глава 5. Общие свойства ЭМГД-плазмы . . . . .</b>	<b>94</b>
5.1. Закон сохранения полной энергии в ЭМГД. . . . .	94
5.2. Анизотропия пространства, заполненного ЭМГД-плазмой . . . . .	97
5.3. Эллиптические системы и уравнения . . . . .	105
5.4. Вырожденная эллиптичность обобщенного закона Ома . . . . .	109
5.5. Добавление: круги (диаграммы) Мора . . . . .	111

Глава 6. Уравнения электромагнитной гидродинамики с учетом диссипаций . . . . .	114
Глава 7. Несжимаемая ЭМГД . . . . .	117
7.1. Общие уравнения несжимаемой ЭМГД . . . . .	117
7.2. Уравнения несжимаемой ЭМГД с учетом диссипаций и тока смещения . . . . .	121
7.3. Сравнение различных моделей несжимаемой плазмы . . . . .	123
7.4. Замечания и дополнения . . . . .	131
Глава 8. Другие гидродинамические модели плазмы . . . . .	144
8.1. Холловская МГД . . . . .	145
8.2. Электронная магнитная гидродинамика (ЭМГ) . . . . .	148
8.3. Гибридная ЭМГД . . . . .	152
8.4. Замечания и дополнения . . . . .	159
Глава 9. Уравнения электромагнитной гидродинамики с учетом разделения зарядов . . . . .	173
9.1. Уравнения электромагнитной гидродинамики . . . . .	174
9.2. Уравнения релятивистской электромагнитной гидродинамики (РЭМГД) . . . . .	180
Глава 10. Линейные волны в ЭМГД . . . . .	184
10.1. Акустическое приближение . . . . .	184
10.2. Акустическое приближение в ЭМГД . . . . .	189
10.3. Акустика бездиссипативной плазмы в ЭМГД . . . . .	195
10.4. Сравнение ЭМГД-акустики с акустическими приближениями в других моделях плазмы . . . . .	216
Глава 11. Установившиеся течения ЭМГД-плазмы в плоском канале . . . . .	221
11.1. Уравнения стационарного решения . . . . .	223
11.2. Комплексификация и решение уравнений стационарных течений . . . . .	226
11.3. Качественное поведение установившегося течения и определяющие параметры . . . . .	232
11.4. Запирание плазмы в канале и гидродинамический «эффект Холла» . . . . .	236
11.5. Случай подвижных и замагниченных стенок канала (течение Куэтта) . . . . .	241
11.6. Вычисление толщины погранслоя . . . . .	246
11.7. Нахождение температуры плазмы в канале . . . . .	248
11.8. Обсуждение результатов . . . . .	252
Глава 12. Одномерные установившиеся течения несжимаемой ЭМГД-плазмы в круглой трубе и цилиндрическом слое . . . . .	255
12.1. Постановка задачи о течении плазмы в круглой цилиндрической трубе . . . . .	256

12.2. Решение задачи об установившемся течении ЭМГД-плазмы в круглой цилиндрической трубе . . . . .	258
12.3. Качественное поведение эпюры продольной скорости установившегося течения . . . . .	264
12.4. Некоторые физические характеристики течения плазмы в трубе . . . . .	267
12.5. Установившееся течение плазмы между двумя соосными цилиндрами . . . . .	272
12.6. Заключительные замечания . . . . .	280
Глава 13. Вынужденные колебания плазмы в круглой трубе . . . . .	282
13.1. Основные уравнения . . . . .	283
13.2. МГД-предел . . . . .	286
13.3. Вынужденные колебания в ЭМГД-теории (случай однократных корней) . . . . .	288
13.4. Анализ корней характеристического уравнения . . . . .	293
13.5. Гидродинамический скин-эффект . . . . .	301
13.6. Вынужденные колебания в ЭМГД (случай кратных корней) . . . . .	307
13.7. Дополнения и замечания . . . . .	315
Глава 14. Однородные деформации плазмы в ЭМГД . . . . .	317
14.1. Некоторые однородные деформации в ЭМГД . . . . .	317
14.2. Простая модель плазменного шнура . . . . .	325
14.3. Общие однородные деформации в ЭМГД . . . . .	332
14.4. Дополнения и замечания . . . . .	342
Глава 15. Бегущие волны в ЭМГД и ускорение плазмы в плазменных ускорителях . . . . .	349
15.1. Уравнения нелинейных бегущих волн в ЭМГД . . . . .	350
15.2. Линейно поляризованные волны в плазме с нулевым продольным магнитным полем . . . . .	354
15.3. Граничная задача для уединенных линейно поляризованных бегущих волн . . . . .	357
15.4. Взаимодействие уединенных линейно поляризованных волн . . . . .	361
15.5. Ускорение ЭМГД-плазмы в плоском канале . . . . .	370
15.6. Ускорение ЭМГД-плазмы в плоском канале с учетом температуры . . . . .	380
15.7. Бегущие волны по массе . . . . .	389
Глава 16. Бегущие волны с нулевым поперечным электрическим полем . . . . .	393
16.1. Первые интегралы уравнений бегущих волн . . . . .	394
16.2. Случай нулевого поперечного электрического поля . . . . .	396
16.3. Синусоидальная волна . . . . .	405
16.4. Уединенные волны . . . . .	408
16.5. Условно-периодические бегущие волны . . . . .	410
16.6. Нелинейные бегущие волны в общем случае . . . . .	417

<b>Глава 17. Равновесные конфигурации в плазме . . . . .</b>	<b>428</b>
17.1. Общие уравнения равновесия . . . . .	430
17.2. Равновесия в цилиндрически симметричном случае и в случае плоской симметрии . . . . .	436
17.3. Равновесие в аксиально симметричном случае: $\theta$ -пинч . . .	437
17.4. Равновесие в аксиально симметричном случае . . . . .	443
17.5. МГД-предел . . . . .	455
17.6. Равновесные конфигурации в случае винтовой симметрии	458
17.7. Некоторые результаты расчетов . . . . .	467
<b>Глава 18. Разрывные течения в ЭМГД . . . . .</b>	<b>472</b>
18.1. Пример разрывного течения в ЭМГД. . . . .	474
18.2. Интегральные законы и обобщенные решения в ЭМГД. . .	477
18.3. Соотношения на разрыве . . . . .	484
18.4. Уравнение ударной адиабаты . . . . .	492
18.5. Разрешение соотношений на разрыве . . . . .	497
18.6. Случай двухчленных уравнений состояния электронов и ионов и изотермической плазмы . . . . .	500
18.7. Условие устойчивости разрыва . . . . .	503
<b>Глава 19. Автомодельные решения в ЭМГД-теории . . . . .</b>	<b>508</b>
19.1. Автомодельные решения в случае цилиндрической сим- метрии . . . . .	509
19.2. Автомодельные решения в случае плоской симметрии . . .	517
19.3. Уравнение автомодельных решений в случае z-пинча . . . .	520
<b>Глава 20. Затухание альфвеновских волн в ЭМГД . . . . .</b>	<b>523</b>
20.1. ЭМГД-уравнения с учетом диссипаций . . . . .	525
20.2. Альфвеновские волны в ЭМГД. . . . .	527
20.3. Временное затухание альфвеновских волн . . . . .	530
20.4. Временное поглощение альфвеновской волны при $t \rightarrow +\infty$	535
20.5. Пространственное поглощение альфвеновских волн . . . . .	544
20.6. Задача об аномальном разогреве солнечной короны . . . . .	552
20.7. Дополнения и замечания . . . . .	558
<b>Приложение . . . . .</b>	<b>564</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>572</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>582</b>