

Физико-математическое наследие: математика  
(дифференциальная геометрия)

---

8НЦ

бу

А. П. Норден

# КРАТКИЙ КУРС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Допущено  
Министерством высшего образования СССР  
в качестве учебного пособия  
для университетов и педагогических институтов

Издание третье



URSS  
МОСКВА

**Норден Александр Петрович**

**Краткий курс дифференциальной геометрии: Учебное пособие.** Изд. 3-е.  
М.: ЛЕНАНД, 2019. — 248 с. (Физико-математическое наследие:  
математика (дифференциальная геометрия).)

Внимание читателей предлагается классический курс дифференциальной геометрии, написанный выдающимся математиком А. П. Норденом. Курс был построен автором в соответствии с программами механико-математических и физико-математических факультетов университетов и педагогических институтов. Книга и в наше время не потеряла свою актуальность и может быть использована как учебное пособие по дифференциальной геометрии. Помимо учебного материала в ней содержится более 200 упражнений, ко многим из которых даны ответы, решения и указания к решениям.

Книга будет полезна математикам и физикам, в том числе преподавателям, аспирантам и студентам естественных и педагогических вузов.

*Б/инв.*

отдел в Учреждении РАН  
Научном центре РАН  
в Черноголовке

Формат 60×90/16. Печ. л. 15,5. Зак. № АП-5284.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД». 117312, Москва, проспект 60-летия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-9710-6233-2

© ЛЕНАНД, 2019

24400 ID 247540



НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

E-mail: URSS@URSS.ru

Каталог изданий в Интернете:  
<http://URSS.ru>

Тел./факс (многоканальный):  
+ 7 (499) 724 25 45



URSS

Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию . . . . .	7
--	---

## ЧАСТЬ I

### ГЛАВА I

#### ВЕКТОРНАЯ ФУНКЦИЯ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

1. Введение . . . . .	9
2. Бесконечно малые векторы . . . . .	9
3. Предел переменного вектора . . . . .	11
4. Векторная функция скалярного аргумента . . . . .	12
5. Годограф векторной функции . . . . .	13
6. Производная векторной функции . . . . .	15
7. Правила дифференцирования вектора . . . . .	15
8. Формула Тейлора . . . . .	18
9. Вектор постоянной длины и вектор постоянного направления . . . . .	19
10. Вектор, параллельный неизменной плоскости . . . . .	20
11. Векторные круговые функции . . . . .	21
12. Интеграл от векторной функции . . . . .	22

### ГЛАВА II

#### КРИВАЯ И КАСАТЕЛЬНАЯ

13. Понятие кривой линии . . . . .	24
14. Параметрическое уравнение кривой . . . . .	24
15. Касательная прямая кривой . . . . .	26
16. Винтовая линия . . . . .	30
17. Неявное уравнение плоской кривой . . . . .	30
18. Особые точки кривой, заданной неявным уравнением . . . . .	32
19. Асимптоты . . . . .	36
20. Касательная и асимптота алгебраической кривой . . . . .	37
21. Огибающая семейства плоских кривых . . . . .	39
22. Поверхность и ее касательные. Нормаль поверхности . . . . .	43
23. Цилиндрические и конические поверхности . . . . .	45
24. Особая точка поверхности . . . . .	46
25. Неявное задание пространственной кривой . . . . .	48
26. Семейство кривых, зависящих от $n$ параметров . . . . .	49
27. Соприкосновение кривых . . . . .	50
28. Соприкосновение кривой и поверхности . . . . .	53

### ГЛАВА III

#### ДЛИНА ДУГИ И СОПРОВОЖДАЮЩИЙ ТРЕХГРАННИК КРИВОЙ

29. Длина дуги . . . . .	55
30. Длина дуги как параметр . . . . .	58

31. Соприкасающаяся плоскость . . . . .	60
32. Уравнение соприкасающейся плоскости . . . . .	62
33. Сопровождающий трехгранник кривой . . . . .	64
34. Формулы Серре — Френе . . . . .	66
35. Другой вывод формул Серре—Френе . . . . .	69
36. Лемма о единичном векторе . . . . .	70
37. Кривизна . . . . .	70
38. Кручение . . . . .	71
39. Формулы для вычисления кривизны и кручения . . . . .	72
40. Взаимное расположение кривой и плоскости . . . . .	75
41. Проекция кривой на соприкасающуюся плоскость . . . . .	78
42. Проекция кривой на спрямляющую плоскость . . . . .	78
43. Вид кривой вблизи данной точки . . . . .	80
44. Вид кривой вблизи точки уплощения . . . . .	82
45. Эволюта плоской кривой . . . . .	83
46. Соприкасающаяся окружность плоской кривой . . . . .	85
47. Эвольвента . . . . .	86
48. Трактриса и цепная линия . . . . .	88

## ГЛАВА IV

## НАТУРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КРИВОЙ

49. Натуральные уравнения . . . . .	91
50. Кривые с общими натуральными уравнениями . . . . .	93
51. Дифференциальные уравнения . . . . .	95
52. Векторные дифференциальные уравнения . . . . .	98
53. Лемма о взаимных тройках . . . . .	100
54. Независимость кривизны и кручения . . . . .	101
55. Натуральные уравнения плоской кривой . . . . .	105
56. Линии откоса . . . . .	107
57. Кривые с общими нормальными . . . . .	110
58. Кривые Бертрана . . . . .	112
59. Линейная зависимость между кривизной и кручением . . . . .	113
60. Кривые постоянной кривизны . . . . .	114

## ГЛАВА V

## РАЗВЕРТЫВАЮЩИЕСЯ ПОВЕРХНОСТИ

61. Огибающая семейства поверхностей . . . . .	116
62. Характеристика семейства поверхностей . . . . .	118
63. Ребро возврата . . . . .	119
64. Развертывающиеся поверхности . . . . .	121
65. Полярная поверхность . . . . .	124
66. Характеристическая точка полярной поверхности . . . . .	126
67. Соприкасающаяся сфера . . . . .	127
68. Огибающая касательных плоскостей . . . . .	129
69. Параллельные кривые . . . . .	130
70. Пространственная эволюта . . . . .	132

## ЧАСТЬ II

## ГЛАВА VI

## ПОВЕРХНОСТЬ И ЕЕ ЛИНЕЙНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

§ 71. Понятие поверхности . . . . .	134
§ 72. Криволинейные координаты и параметрическое уравнение поверхности . . . . .	135
§ 73. Примеры параметризованных поверхностей . . . . .	137

74. Касательная прямая поверхности . . . . .	140
75. Касательная плоскость . . . . .	141
76. Огибающая семейства плоскостей, зависящих от двух параметров . . . . .	142
77. Длина дуги . . . . .	143
78. Первая квадратичная форма . . . . .	144
79. Угол между двумя линиями . . . . .	145
80. Ортогональные траектории . . . . .	147
81. Площадь поверхности . . . . .	148
82. Поверхность вращения . . . . .	151
83. Косая и развертывающаяся линейчатые поверхности . . . . .	153
84. Криволинейные координаты в пространстве . . . . .	156

## ГЛАВА VII

## КРИВИЗНА ЛИНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ

85. Нормальная кривизна . . . . .	159
86. Вторая квадратичная форма . . . . .	159
87. Кривизна кривой и ее соприкасающаяся плоскость . . . . .	161
88. Нормальное сечение . . . . .	163
89. Теорема Менье . . . . .	163
90. Индикатриса Дюпена . . . . .	165
91. Формула Эйлера . . . . .	167
92. Характеристическое уравнение поверхности. Полная и средняя кривизны . . . . .	168
93. Кривизны поверхности вращения . . . . .	170
94. Кривизна линий на сфере . . . . .	171
95. Классификация точек поверхности . . . . .	171
96. Строение поверхности вблизи эллиптической точки . . . . .	173
97. Строение поверхности вблизи гиперболической точки . . . . .	174
98. Строение поверхности вблизи параболической точки . . . . .	176
99. Линия пересечения поверхности с ее касательной плоскостью . . . . .	178
100. Точки поверхностей второго порядка . . . . .	179
101. Сферическое отображение . . . . .	180
102. Знак полной кривизны . . . . .	182

## ГЛАВА VIII

## ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ СЕТИ И ЛИНИИ НА ПОВЕРХНОСТИ

103. Сопряженные направления . . . . .	185
104. Сопряженная сеть . . . . .	187
105. Поверхности переноса . . . . .	188
106. Асимптотические линии . . . . .	189
107. Линии кривизны . . . . .	191
108. Теорема Иоахимстала . . . . .	193
109. Уравнение линий кривизны . . . . .	194
110. Поверхности нулевой кривизны . . . . .	197
111. Поверхность, состоящая из омбилических точек . . . . .	198

## ГЛАВА IX

## ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТИ

112. Изгибание и наложимость . . . . .	200
113. Признак наложимости . . . . .	200
114. Внутренняя геометрия поверхности . . . . .	202
115. Изгибание развертывающихся поверхностей . . . . .	203
116. Сопровождающий трехгранник поверхности . . . . .	204
117. Дифференциал единичного касательного вектора поверхности . . . . .	206
118. Геодезическая кривизна . . . . .	207

§	119. Геодезические линии . . . . .	209
§	120. Геодезические линии поверхности вращения . . . . .	211
§	121. Полугеодезические координаты . . . . .	212
§	122. Геодезическая линия как кратчайшая . . . . .	214
§	123. Окончание подсчета коэффициентов сопровождающего трехгранника . . . . .	215
*§	124. Основные квадратичные формы определяют поверхность . . . . .	216
§	125. Теорема Гаусса . . . . .	218
§	126. Конформное отображение . . . . .	220
§	127. Стереографическая проекция . . . . .	221
§	128. Линейный элемент поверхности постоянной гауссовой кривизны . . . . .	223
§	129. Наложимость поверхностей постоянной кривизны . . . . .	224
§	130. Псевдосфера . . . . .	225
*§	131. Геодезические линии псевдосферы . . . . .	226

## ГЛАВА X

## \*ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПЕРЕНЕСЕНИЕ

§	132. Векторы, принадлежащие поверхности . . . . .	228
§	133. Внутреннее параллельное перенесение . . . . .	229
§	134. Развертывание кривой на плоскость . . . . .	231
§	135. Геодезическая кривизна и геодезические линии . . . . .	232
§	136. Площадь сферического многоугольника . . . . .	233
§	137. Параллельный обвод вектора по замкнутому сферическому контуру . . . . .	235
§	138. Параллельный обвод вектора по произвольной поверхности . . . . .	236
§	139. Теорема Гаусса—Бонне . . . . .	238
§	140. Геодезический треугольник . . . . .	240
§	141. Теорема Гаусса—Бонне для многосвязной области . . . . .	241
§	142. Интегральная кривизна замкнутой поверхности . . . . .	243