

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова  
Российской академии наук (ИПУ РАН)

*К 80-летию ИПУ РАН*

Б. Т. Поляк, М. В. Хлебников, Л. Б. Рапопорт

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рекомендовано  
федеральным учебно-методическим объединением  
в системе высшего образования по укрупненным группам  
специальностей и направлений подготовки  
27.00.00 «Управление в технических системах»  
в качестве учебного пособия при реализации основных  
профессиональных образовательных программ  
подготовки магистров по укрупненной группе направлений  
подготовки 27.04.00 «Управление в технических системах»



URSS  
МОСКВА

Поляк Борис Теодорович,  
Хлебников Михаил Владимирович,  
Рапопорт Лев Борисович

Математическая теория автоматического управления:  
Учебное пособие. — М.: ЛЕНАНД, 2019. — 504 с.

Учебное пособие излагает основы теории управления в современной форме. Помимо традиционных разделов теории линейных систем в книгу включены вопросы управления в условиях неопределенности (робастность, внешние возмущения), управления нелинейными системами (абсолютная устойчивость, теоремы Ляпунова, хаос), техника линейных матричных неравенств. В приложениях содержится требуемый математический аппарат. Многочисленные примеры демонстрируют особенности применения теории.

Пособие предназначено для подготовки магистров по укрупненной группе направлений подготовки 27.04.00 «Управление в технических системах» и может быть использовано для подготовки кадров высшей квалификации по направлению подготовки 27.06.01 «Управление в технических системах». Книга также будет полезна научным и инженерно-техническим работникам.

**Рецензенты:**

директор Института системного анализа ФИЦ ИУ РАН,  
академик РАН, д-р техн. наук, проф. Ю. С. Попков;  
директор Института проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,  
член-корр. РАН, д-р техн. наук, проф. Д. А. Новиков

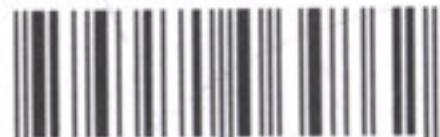
ООО «ЛЕНАНД». 117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.  
Формат 60×90/16. Печ. л. 31,5. Зак. № 302.

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного электронного  
оригинал-макета в АО «Областная типография «Печатный двор».  
432049, г. Ульяновск, ул. Пушкирева, 27.

**ISBN 978-5-9710-6486-2**

© Б. Т. Поляк, М. В. Хлебников,  
Л. Б. Рапопорт, 2019  
© ИПУ РАН, 2019  
© ЛЕНАНД, оформление, 2019

25160 ID 249750



9 785971 064862

**НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА**



E-mail: URSS@URSS.ru

Каталог изданий в Интернете:

<http://URSS.ru>

Тел./факс (многоканальный):  
+ 7 (499) 724 25 45

# Оглавление

Предисловие . . . . .	7
Список обозначений . . . . .	10
<b>Часть I. Линейные системы . . . . .</b>	<b>16</b>
1. Линейная теория: анализ и синтез . . . . .	17
1.1. Описание линейных систем . . . . .	17
1.1.1. Пространство состояний . . . . .	18
1.1.2. Передаточная функция . . . . .	20
1.1.3. Операторный подход . . . . .	27
1.1.4. Одномерные системы . . . . .	36
1.1.5. Примеры . . . . .	46
1.2. Устойчивость . . . . .	52
1.2.1. Устойчивость матриц . . . . .	53
1.2.2. Устойчивость линейных систем . . . . .	54
1.2.3. Критерии устойчивости полиномов . . . . .	64
1.2.4. Частотные критерии устойчивости замкнутых систем . . . . .	72
1.2.5. Примеры . . . . .	79
1.3. Виды управления . . . . .	83
1.3.1. Программное управление. Управляемость . . . . .	83
1.3.2. Управление по обратной связи . . . . .	90
1.3.3. Наблюдаемость . . . . .	92
1.3.4. Частотные методы . . . . .	94
1.3.5. Примеры . . . . .	100
1.4. Стабилизация . . . . .	101
1.4.1. Стабилизация с помощью регуляторов низкого порядка . . . . .	101

1.4.2. Обратная связь по состоянию . . . . .	107
1.4.3. Обратная связь по выходу . . . . .	111
1.4.4. Квадратичная стабилизация . . . . .	116
1.4.5. Примеры . . . . .	122
1.5. Показатели качества . . . . .	128
1.5.1. Задачи оптимизации управления на конечном интервале . . . . .	128
1.5.2. Линейно-квадратичный регулятор . . . . .	130
1.5.3. Примеры . . . . .	139
<b>2. Линейная теория: внешние возмущения и неопределенность . . . . .</b>	<b>140</b>
2.1. Внешние возмущения: анализ . . . . .	140
2.1.1. Реакция на типовые возмущения . . . . .	140
2.1.2. Устойчивость при наличии внешних возмущений .	142
2.1.3. Множества достижимости для устойчивых систем	149
2.1.4. Переходные процессы . . . . .	161
2.1.5. Ограниченные внешние возмущения . . . . .	163
2.1.6. Гармонические и $L_2$ -ограниченные возмущения .	174
2.1.7. Случайные внешние возмущения . . . . .	178
2.1.8. Примеры . . . . .	179
2.2. Внешние возмущения: синтез . . . . .	184
2.2.1. Подавление внешних возмущений . . . . .	185
2.2.2. $H_\infty$ -оптимизация . . . . .	193
2.2.3. Подавление случайных возмущений . . . . .	199
2.2.4. Примеры . . . . .	201
2.3. Задачи оценивания . . . . .	213
2.3.1. Эллипсоидальное оценивание . . . . .	213
2.3.2. Фильтр Калмана . . . . .	217
2.3.3. Примеры . . . . .	220
2.4. Неопределенность и ее виды . . . . .	222
2.4.1. Параметрическая неопределенность . . . . .	224
2.4.2. Частотная неопределенность . . . . .	228
2.4.3. $(M, \Delta)$ -конфигурация . . . . .	229
2.4.4. Нестационарные и нелинейные возмущения .	233
2.5. Робастная устойчивость . . . . .	233
2.5.1. Робастная устойчивость полиномов . . . . .	234
2.5.2. Робастная устойчивость матриц . . . . .	243
2.5.3. Робастная устойчивость при неопределенных передаточных функциях . . . . .	246

2.6. Робастная стабилизация и управление . . . . .	254
2.6.1. Робастная квадратичная стабилизация . . . . .	254
2.6.2. Робастный линейно-квадратичный регулятор .	261
2.6.3. $H_\infty$ -оптимизация: робастный вариант . . . . .	264
2.7. Положительные линейные системы . . . . .	266
2.7.1. Условия положительности и устойчивости . . . . .	267
2.7.2. Внешние возмущения . . . . .	272
2.7.3. Стабилизация . . . . .	275
2.7.4. Робастность . . . . .	276
<b>Часть II. Нелинейные системы . . . . .</b>	<b>278</b>
<b>3. Нелинейная теория . . . . .</b>	<b>279</b>
3.1. Особенности динамики нелинейных систем . . . . .	279
3.1.1. Множественность состояний равновесия . . . . .	281
3.1.2. Конечное время переходного процесса . . . . .	295
3.1.3. Существование предельных циклов . . . . .	296
3.1.4. Хаотическая динамика . . . . .	298
3.1.5. Наличие кратных гармоник . . . . .	302
3.1.6. Многорежимность поведения . . . . .	303
3.2. Устойчивость и стабилизация . . . . .	304
3.2.1. Определение устойчивости . . . . .	305
3.2.2. Линейные нестационарные системы. Устойчивость	309
3.2.3. Линейные нестационарные системы. Параметрический резонанс . . . . .	310
3.2.4. Нелинейные системы. Теоремы об устойчивости .	318
3.3. Анализ устойчивости по линейному приближению . .	335
3.3.1. Исследование устойчивости стационарных нелинейных систем по линейному приближению .	335
3.3.2. Нелинейная обратная связь. Абсолютная устойчивость . . . . .	338
3.4. Управление нелинейными системами . . . . .	357
3.4.1. Метод линеаризации обратной связью . . . . .	357
3.4.2. Метод скользящих режимов . . . . .	370
3.4.3. Метод декомпозиции для стабилизации механических систем . . . . .	378
3.4.4. Каскадные системы. Синтез управления методом бэкстеппинга . . . . .	385
3.5. Оптимальное управление . . . . .	394
3.5.1. Динамическое программирование . . . . .	395

3.5.2. Линейно-квадратичная задача оптимального управления в дискретном времени . . . . .	401
3.5.3. Непрерывные системы. Уравнения в частных производных Гамильтона – Якоби – Беллмана . .	407
3.5.4. Линейно-квадратичная задача оптимального управления в непрерывном времени . . . . .	410
3.5.5. Принцип максимума . . . . .	414
3.6. Дискретные динамические системы . . . . .	421
3.6.1. Асимптотическая устойчивость нелинейных отображений . . . . .	422
3.6.2. Бифуркации и хаотическое поведение в одномерном случае . . . . .	425
3.6.3. Странные аттракторы для двумерных систем . .	428
3.6.4. Фракталы для двумерных систем . . . . .	431
<b>Приложение . . . . .</b>	<b>434</b>
А. Элементарные свойства матриц . . . . .	434
Б. Нормы матриц . . . . .	437
В. Функции от матриц . . . . .	440
Г. Линейные матричные неравенства . . . . .	449
Д. Лемма Шура и следствия из нее . . . . .	453
Е. Матричное описание эллипсоидов . . . . .	457
Ж. <i>S</i> -процедура . . . . .	459
З. Лемма Питерсена . . . . .	461
И. Уравнение Ляпунова и его свойства . . . . .	464
К. Две теоремы об управляемости . . . . .	473
<b>Библиографический комментарий . . . . .</b>	<b>475</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>486</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>491</b>