

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФИЗИКИ**

---

**ТОМ I**

**В. А. АБРАМОВСКИЙ  
Г. И. АРХИПОВ  
О. Н. НАЙДА**

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ  
И ИНТЕГРАЛЬНОЕ  
ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ  
ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

*Рекомендовано к использованию при осуществлении  
образовательной деятельности по программам  
высшего образования — программам бакалавриата,  
программам специалитета и программам  
магистратуры по области образования  
«Математические и естественные науки»*



**МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2019**

УДК 517  
ББК 22.161.1  
А 16

Абрамовский В.А., Архипов Г.И., Найда О.Н. **Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной**: Учеб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2019. — 696 с. — (Математические основы физики: Т. I). — ISBN 978-5-9221-1852-1.

Учебник содержит материалы по теории вещественных чисел, числовым последовательностям, теории пределов и непрерывности функций, свойствам производных и интегралов и другим разделам математического анализа. Математический материал иллюстрируется примерами из механики.

Для студентов бакалавриата и магистратуры, специализирующихся в области физики, прикладной математики, компьютерных наук и техники.

Учебное издание

*АБРАМОВСКИЙ Виктор Анатольевич*  
*АРХИПОВ Геннадий Иванович*  
*НАЙДА Олег Николаевич*

## **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

(Серия: Математические основы физики. Том I)

Редактор *В.С. Аролович*

Оригинал-макет: *Е.В. Сабаева*

Оформление переплета: *В.Ф. Киселёв*

Подписано в печать 15.04.2019. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 43,5. Уч.-изд. л. 47,85. Тираж 500 экз. Заказ № 3362

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерпериодика»  
117342, г. Москва, ул. Бутлерова, д. 17Б  
E-mail: [porsova@fml.ru](mailto:porsova@fml.ru), [sale@fml.ru](mailto:sale@fml.ru)  
Сайт: <http://www.fml.ru>  
Интернет-магазин: <http://www.fmllib.ru>

Отпечатано с электронных носителей издательства  
в АО «Первая Образцовая типография»  
Филиал «Чеховский Печатный Двор»  
142300, Московская область, г. Чехов,  
ул. Полиграфистов, д. 1. Сайт: [www.chpd.ru](http://www.chpd.ru).  
E-mail: [sales@chpd.ru](mailto:sales@chpd.ru), тел.: 8 (499) 270-73-59

ISBN 978-5-9221-1852-1



9 785922 118521

ISBN 978-5-9221-1852-1

© ФИЗМАТЛИТ, 2019

© В. А. Абрамовский, Г. И. Архипов,  
О. Н. Найда, 2019

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|  |           |
|--|-----------|
| Предисловие . . . . .  | 13        |
| <b>Глава I. Вещественные числа . . . . .</b>   | <b>15</b> |
| <b>§ 1. Целые и рациональные числа . . . . .</b>   | <b>16</b> |
| <b>§ 2. Бесконечные десятичные дроби и правила их сравнения</b>  | <b>20</b> |
| 2.1. Периодические и аперiodические десятичные дроби,<br>иррациональные числа; вещественные числа . . . . .  | 20        |
| 2.2. Правило сравнения вещественных чисел . . . . .  | 22        |
| 2.3. Транзитивность равенств и неравенств. . . . .   | 26        |
| <b>§ 3. Множества вещественных чисел, ограниченные сверху<br/>  или снизу . . . . .</b>  | <b>28</b> |
| 3.1. Верхние и нижние грани, супремумы и инфимумы . . . .  | 28        |
| 3.2. Супремум числового множества, ограниченного сверху  | 39        |
| 3.3. Инфимум числового множества, ограниченного снизу  | 46        |
| <b>§ 4. Некоторые вспомогательные леммы . . . . .</b>  | <b>48</b> |
| <b>§ 5. Сложение вещественных чисел и его свойства . . . . .</b>   | <b>53</b> |
| 5.1. Определение суммы вещественных чисел. . . . .   | 54        |
| 5.2. Свойства суммы . . . . .  | 57        |
| 5.2.1. Переместительное свойство (коммутативность):<br>$\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (57). 5.2.2. Сложение с нулём: $\alpha + 0 =$<br>$= \alpha$ (57). 5.2.3. Сочетательное свойство (ассоциатив-<br>ность): $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ (58). 5.2.4. Нера-<br>венства для сумм: $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ , если $\alpha > \beta$ (59).<br>5.2.5. Сумма вещественного числа $\alpha$ и противополож-<br>ного ему числа $-\alpha$ : $\alpha + (-\alpha) = 0$ ; разность (60). |           |
| <b>§ 6. Умножение вещественных чисел и его свойства . . . . .</b>  | <b>63</b> |
| 6.1. Произведение вещественных чисел . . . . .   | 63        |
| 6.1.1. Определение произведения положительных чи-<br>сел (63). 6.1.2. Умножение при наличии хотя бы одно-<br>го неположительного сомножителя (65).   |           |

|   |            |
|---|------------|
| 6.2. Свойства произведения . . . . .  | 66         |
| 6.2.1. Переместительное свойство (коммутативность): $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ (66). 6.2.2. Умножение на единицу: $\alpha \cdot 1 = \alpha$ (67). 6.2.3. Сочетательное свойство (ассоциативность): $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ (67). 6.2.4. Распределительное свойство (дистрибутивность): $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ (70). 6.2.5. Неравенства для произведения: если $\alpha > \beta$ , $\gamma > 0$ , то $\alpha\gamma > \beta\gamma$ (75). |            |
| <b>§ 7. Степень с целым показателем. Бином Ньютона . . . . .</b>  | <b>77</b>  |
| 7.1. Существование числа $\alpha^{-1}$ , обратного ненулевому вещественному $\alpha$ : $\alpha^{-1}\alpha = 1$ ; частное . . . . .  | 77         |
| 7.2. Определение степеней с целыми показателями и их свойства . . . . .   | 81         |
| 7.3. Бином Ньютона . . . . .  | 86         |
| <b>§ 8. Некоторые часто используемые соотношения . . . . .</b>  | <b>88</b>  |
| <b>§ 9. Наиболее используемые множества вещественных чисел . . . . .</b>  | <b>89</b>  |
| <b>Глава II. Простейшие элементарные функции . . . . .</b>  | <b>91</b>  |
| <b>§ 10. Понятие функции . . . . .</b>  | <b>91</b>  |
| 10.1. Определение функции и примеры . . . . .   | 91         |
| 10.2. Ограниченность и монотонность функций . . . . .   | 94         |
| <b>§ 11. Рациональные степени положительных вещественных чисел . . . . .</b>  | <b>96</b>  |
| 11.1. Арифметический корень $n$ -й степени из неотрицательного вещественного числа . . . . .  | 97         |
| 11.2. Основные свойства арифметических корней . . . . .   | 101        |
| 11.3. Степень с рациональным показателем . . . . .  | 103        |
| <b>§ 12. Показательная функция . . . . .</b>  | <b>107</b> |
| 12.1. Определение показательной функции . . . . .   | 107        |
| 12.2. Свойства показательной функции . . . . .  | 111        |
| <b>§ 13. Краткие сведения из евклидовой геометрии. Теорема Пифагора. Длина окружности. Число <math>\pi</math> . . . . .</b>   | <b>113</b> |
| 13.1. Точка, прямая, луч, отрезок. Плоскость. Угол . . . . .  | 114        |
| 13.2. Параллельные прямые . . . . .   | 117        |
| 13.3. Треугольники . . . . .  | 118        |
| 13.4. Равенство треугольников. Многоугольники и их площади . . . . .  | 121        |
| 13.5. Подобие треугольников. Синус, косинус, тангенс, котангенс . . . . .   | 123        |
| 13.6. Теорема Пифагора . . . . .  | 126        |

|   |            |
|---|------------|
| 13.7. Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов $30^\circ$ , $45^\circ$ и $60^\circ$ . . . . . | 128        |
| 13.8. Теорема косинусов . . . . .   | 129        |
| 13.9. Косинус и синус удвоенного и половинного аргументов . . . . .   | 131        |
| 13.10. Длина окружности; число $\pi$ . . . . .  | 133        |
| <b>§ 14. Радианная мера угла. Алгебраические свойства тригонометрических функций . . . . .</b>                  | <b>139</b> |
| 14.1. Радианная мера угла . . . . .   | 140        |
| 14.2. Тригонометрическая окружность . . . . .   | 140        |
| 14.3. График функции $\sin \alpha$ при $\alpha \in [0; \pi/2]$ . . . . .  | 143        |
| 14.4. Основополагающие тригонометрические тождества . . . . .   | 144        |
| 14.5. Синус и косинус суммы углов . . . . .   | 146        |
| 14.6. Возрастание $\sin \alpha$ и убывание $\cos \alpha$ при $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ . . . . .               | 148        |
| 14.7. Формулы удвоенного и половинного аргументов . . . . .   | 149        |
| 14.8. Неравенство $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ . . . . .  | 152        |
| <b>Глава III. Числовая последовательность и её предел . . . . .</b>   | <b>154</b> |
| <b>§ 15. Понятие последовательности; бесконечно большая и бесконечно малая последовательности . . . . .</b>     | <b>154</b> |
| 15.1. Определение последовательности; арифметические операции над последовательностями . . . . .                | 154        |
| 15.2. Ограниченные и неограниченные последовательности . . . . .  | 155        |
| 15.3. Бесконечно большие последовательности . . . . .   | 156        |
| 15.4. Бесконечно малые последовательности . . . . .   | 158        |
| 15.5. Основные свойства бесконечно малых последовательностей . . . . .  | 159        |
| <b>§ 16. Предел последовательности . . . . .</b>  | <b>163</b> |
| 16.1. Понятие сходящейся последовательности . . . . .   | 163        |
| 16.2. Основные свойства сходящихся последовательностей . . . . .  | 167        |
| 16.3. Предельный переход в неравенствах . . . . .   | 171        |
| <b>§ 17. Монотонные последовательности . . . . .</b>  | <b>173</b> |
| 17.1. Определение монотонной последовательности; признак её сходимости . . . . .                                | 173        |
| 17.2. Примеры . . . . .   | 175        |
| 17.3. Число $e$ . . . . .   | 177        |
| <b>§ 18. Ограниченные последовательности. Подпоследовательности . . . . .</b>                                   | <b>179</b> |
| 18.1. Подпоследовательности; теорема Больцано–Вейерштрасса . . . . .  | 179        |
| 18.2. Критерий Коши сходимости последовательности . . . . .   | 185        |

|   |     |
|---|-----|
| <b>Глава IV. Предел функции в точке и на бесконечности (по Гейне)</b> . . . . .   | 191 |
| <b>§ 19. Конечный предел функции (по Гейне)</b> . . . . .   | 191 |
| 19.1. Определение предела функции в точке (по Гейне) . . . . .  | 191 |
| 19.2. Правый и левый пределы функции в точке (по Гейне) . . . . .   | 197 |
| 19.3. Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности (по Гейне) . . . . .  | 204 |
| 19.4. Арифметические операции над функциями, имеющими предел . . . . .  | 206 |
| 19.5. Предельный переход в неравенствах . . . . .   | 210 |
| <b>§ 20. Бесконечно малые и бесконечно большие функции (по Гейне)</b> . . . . .   | 212 |
| 20.1. Определения бесконечно малых и бесконечно больших функций . . . . .   | 212 |
| 20.2. Основные свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций . . . . .   | 215 |
| 20.3. Взаимосвязь общего и односторонних пределов функции (конечных и бесконечных) . . . . .  | 218 |
| 20.4. Классификация бесконечно малых и бесконечно больших функций . . . . .   | 227 |
| <b>§ 21. Пределы тригонометрических функций</b> . . . . .   | 230 |
| 21.1. Пределы функций $\sin x$ , $\cos x$ , $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ при $x \rightarrow x_0$ ( $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ ) . . . . . | 231 |
| 21.2. Первый замечательный предел . . . . .   | 232 |
| <b>§ 22. Пределы показательной функции вещественного аргумента</b> . . . . .  | 233 |
| 22.1. Предел функции $a^x$ при $x \rightarrow b$ . . . . .  | 234 |
| 22.2. Алгебраические свойства показательной функции . . . . .   | 236 |
| 22.3. Предел функции $a^x$ при $x \rightarrow \pm\infty$ . . . . .  | 239 |
| 22.4. Второй замечательный предел . . . . .   | 242 |
| <b>Глава V. Непрерывность функции</b> . . . . .   | 248 |
| <b>§ 23. Непрерывность функции в точке</b> . . . . .  | 248 |
| 23.1. Определение непрерывности . . . . .   | 248 |
| 23.2. Арифметические действия над непрерывными функциями . . . . .  | 252 |
| 23.3. Непрерывность сложной функции . . . . .   | 252 |
| <b>§ 24. Непрерывность функции на сегменте</b> . . . . .  | 254 |
| 24.1. Прохождение непрерывной функции через нуль при смене знака (первая теорема Больцано–Коши) . . . . .   | 254 |

|  |     |
|--|-----|
| 24.2. Прохождение непрерывной функции через промежуточные значения (вторая теорема Больцано–Коши) . . . . .                  | 257 |
| 24.3. Ограниченность функции, непрерывной на сегменте (первая теорема Вейерштрасса) . . . . .                                | 259 |
| 24.4. Достижение функцией, непрерывной на сегменте, своих точных граней (вторая теорема Вейерштрасса) . . . . .              | 261 |
| <b>§ 25. Обратные функции</b> . . . . .  | 263 |
| 25.1. Определение обратной функции . . . . .   | 264 |
| 25.2. Условие существования строго монотонной и непрерывной обратной функции . . . . .                                       | 266 |
| <b>§ 26. Логарифм</b> . . . . .  | 272 |
| 26.1. Определение логарифма . . . . .  | 272 |
| 26.2. Основные свойства логарифмов . . . . .   | 273 |
| 26.3. Логарифмическая функция . . . . .  | 275 |
| <b>§ 27. Обратные тригонометрические функции</b> . . . . .   | 276 |
| 27.1. Арксинус и арккосинус . . . . .  | 277 |
| 27.2. Арктангенс и арккотангенс . . . . .  | 279 |
| <b>§ 28. Классификация точек разрыва</b> . . . . .   | 282 |
| 28.1. Устранимый разрыв . . . . .  | 282 |
| 28.2. Разрыв первого рода . . . . .  | 283 |
| 28.3. Разрыв второго рода . . . . .  | 284 |
| <b>Глава VI. Производные и их свойства</b> . . . . .   | 287 |
| <b>§ 29. Производные</b> . . . . .   | 287 |
| 29.1. Приращения аргумента и функции; разностная форма условия непрерывности . . . . .                                       | 287 |
| 29.2. Определение производной . . . . .  | 288 |
| 29.3. Геометрическая интерпретация . . . . .   | 295 |
| 29.4. Понятие дифференцируемости функции . . . . .   | 296 |
| 29.4.1. Определение дифференцируемости (296) . . . . .   |     |
| 29.4.2. Непрерывность дифференцируемой функции (298) . . . . .   |     |
| 29.5. Производная суммы, разности, произведения и частного функций . . . . .   | 299 |
| <b>§ 30. Производные сложной и обратной функций. Высшие производные, формула Лейбница. Первое правило Лопиталя</b> . . . . . | 301 |
| 30.1. Производная сложной функции . . . . .  | 301 |
| 30.2. Производная обратной функции . . . . .   | 304 |
| 30.3. Таблица производных простейших элементарных функций . . . . .  | 307 |

|   |            |
|---|------------|
| 30.4. Упражнения . . . . .  | 308        |
| 30.5. Производные высших порядков . . . . .   | 309        |
| 30.5.1. Определения и примеры (309). 30.5.2. Производные $n$ -го порядка от простейших элементарных функций (310). 30.5.3. Производные $n$ -го порядка от произведения; формула Лейбница (311). |            |
| 30.6. Первое правило Лопиталю: раскрытие неопределённости $\frac{0}{0}$ при $x \rightarrow a$ . . . . .   | 313        |
| <b>Глава VII. Основные теоремы о дифференцируемых функциях . . . . .</b>  | <b>316</b> |
| <b>§ 31. Простейшие свойства дифференцируемых функций. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши . . . . .</b>   | <b>316</b> |
| 31.1. Локальный экстремум функции; теорема Ферма . . . . .  | 316        |
| 31.2. Теоремы Ролля и Лагранжа . . . . .  | 319        |
| 31.3. Теорема Коши . . . . .  | 322        |
| <b>§ 32. Исследование функций и их графиков с помощью производных . . . . .</b>   | <b>323</b> |
| 32.1. Достаточное условие постоянства функции . . . . .   | 323        |
| 32.2. Признак монотонности функции . . . . .  | 324        |
| 32.3. Достаточные условия существования локального экстремума функции; асимптоты . . . . .  | 325        |
| 32.4. Направление выпуклости графика функции; точки перегиба . . . . .  | 331        |
| 32.5. Радиус кривизны плоской кривой . . . . .  | 341        |
| <b>§ 33. Первое правило Лопиталю . . . . .</b>  | <b>347</b> |
| 33.1. Раскрытие неопределённости $0/0$ при $x \rightarrow a$ . . . . .  | 347        |
| 33.2. Раскрытие неопределённости $0/0$ при $x \rightarrow \pm\infty$ . . . . .  | 352        |
| <b>Глава VIII. Формула Тейлора . . . . .</b>  | <b>358</b> |
| <b>§ 34. Вывод формулы Тейлора. Теорема Тейлора . . . . .</b>   | <b>358</b> |
| 34.1. Постановка задачи и общая идея метода . . . . .   | 358        |
| 34.2. Теорема Тейлора . . . . .   | 361        |
| <b>§ 35. Формула Маклорена и её приложения . . . . .</b>  | <b>365</b> |
| 35.1. Формула Маклорена . . . . .   | 365        |
| 35.2. Приложение формулы Маклорена к показательной функции . . . . .  | 366        |
| 35.3. Приложение формулы Маклорена к логарифмической функции . . . . .  | 368        |
| 35.4. Приложение формулы Маклорена к степенной функции . . . . .  | 369        |

|   |            |
|---|------------|
| 35.5. Приложения формулы Маклорена к арктангенсу и к арксинусу; число $\pi$ . . . . .                               | 371        |
| 35.6. Приложение формулы Маклорена к синусу и косинусу . . . . .  | 375        |
| 35.7. Приложение формулы Маклорена к раскрытию неопределённости $0/0$ при $x \rightarrow 0$ . . . . .               | 380        |
| <b>Глава IX. Простейшие физические приложения производной: уравнения движения по прямой . . . . .</b>               | <b>382</b> |
| <b>§ 36. Расстояния и промежутки времени. Скорость и ускорение. Законы Ньютона. Масса, сила и импульс . . . . .</b> | <b>382</b> |
| 36.1. Расстояния и промежутки времени . . . . .   | 382        |
| 36.2. Мгновенная скорость и мгновенное ускорение . . . . .  | 384        |
| 36.3. Второй и третий законы Ньютона; масса и сила . . . . .  | 389        |
| 36.4. Импульс тела и системы тел; закон сохранения импульса; измерение массы . . . . .                              | 393        |
| <b>§ 37. Движение под действием некоторых видов сил . . . . .</b>   | <b>396</b> |
| 37.1. Сухое трение скольжения . . . . .   | 396        |
| 37.2. Сила упругости при малых деформациях . . . . .  | 397        |
| 37.3. Вязкое трение . . . . .   | 400        |
| <b>§ 38. Собственные колебания материальной точки . . . . .</b>   | <b>408</b> |
| 38.1. Гармонические колебания . . . . .   | 408        |
| 38.2. Затухающие колебания; аperiodические движения . . . . .   | 411        |
| <b>§ 39. Вынужденные колебания. Резонанс . . . . .</b>  | <b>422</b> |
| 39.1. Уравнение вынужденных колебаний . . . . .   | 422        |
| 39.2. Установившиеся вынужденные колебания; резонанс . . . . .  | 426        |
| <b>§ 40. Переходные процессы . . . . .</b>  | <b>431</b> |
| <b>Глава X. Неопределённый интеграл . . . . .</b>   | <b>435</b> |
| <b>§ 41. Первообразная функция . . . . .</b>  | <b>435</b> |
| 41.1. Определение первообразной и её единственность (с точностью до аддитивной константы) . . . . .                 | 435        |
| 41.2. Основные свойства неопределённого интеграла . . . . .   | 436        |
| 41.3. Таблица основных неопределённых интегралов . . . . .  | 437        |
| <b>§ 42. Основные методы отыскания первообразной . . . . .</b>  | <b>438</b> |
| 42.1. Интегрирование путём разложения на слагаемые . . . . .  | 438        |
| 42.2. Интегрирование подстановкой . . . . .   | 439        |
| 42.3. Интегрирование по частям . . . . .  | 440        |
| 42.4. Соединение различных методов . . . . .  | 441        |
| 42.5. Примеры для упражнений . . . . .  | 443        |

|   |            |
|---|------------|
| § 43. Интегрирование рациональных выражений . . . . .   | 447        |
| 43.1. Интегрирование простых дробей . . . . .   | 448        |
| 43.2. Метод неопределённых коэффициентов . . . . .  | 452        |
| 43.3. Метод Остроградского . . . . .  | 461        |
| § 44. Интегрирование иррациональных и тригонометрических выражений . . . . .  | 466        |
| 44.1. Интегралы от выражений вида $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right)$ . . . . . | 467        |
| 44.2. Интегралы от выражений вида $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ ; подстановки Эйлера . . . . .                       | 471        |
| 44.3. Интегралы от выражений вида $R(\sin x, \cos x)$ . . . . .   | 477        |
| <b>Глава XI. Конечные пределы функции и непрерывность, по Коши . . . . .</b>  | <b>480</b> |
| § 45. Конечные пределы функции по Коши в точке и на бесконечности . . . . .   | 480        |
| 45.1. Определения конечных пределов функции в точке по Коши . . . . .   | 480        |
| 45.2. Эквивалентность определений конечных пределов в точке по Коши и по Гейне . . . . .                            | 485        |
| 45.3. Определение конечных пределов функции на бесконечности (по Коши) . . . . .                                    | 490        |
| 45.4. Эквивалентность определений конечных пределов на бесконечности по Коши и по Гейне . . . . .                   | 493        |
| § 46. Некоторые локальные свойства функции, имеющей конечный предел в точке . . . . .                               | 498        |
| 46.1. Локальная ограниченность функции, имеющей предел в точке . . . . .  | 498        |
| 46.2. Теорема об устойчивости знака непрерывной функции . . . . .   | 501        |
| 46.3. Возрастание (убывание) функции в окрестности точки; второе достаточное условие экстремума . . . . .           | 502        |
| § 47. Критерий Больцано–Коши существования предела функции . . . . .  | 504        |
| § 48. Равномерная непрерывность . . . . .   | 509        |
| 48.1. Определение равномерной непрерывности . . . . .   | 509        |
| 48.2. Теорема Кантора . . . . .   | 512        |
| <b>Глава XII. Бесконечные пределы функций по Коши . . . . .</b>   | <b>515</b> |
| § 49. Определение бесконечных пределов в точке по Коши . . . . .  | 515        |

|  |            |
|--|------------|
| § 50. Эквивалентность бесконечных пределов в точке по Коши и по Гейне . . . . .  | 520        |
| § 51. Бесконечные пределы на бесконечности по Коши . . . . .   | 529        |
| 51.1. Определения бесконечных пределов функции на бесконечности по Коши . . . . .                                      | 529        |
| 51.2. Эквивалентность бесконечных пределов функции на бесконечности по Коши и по Гейне . . . . .                       | 533        |
| § 52. Второе правило Лопиталю: раскрытие неопределённостей $\infty/\infty$ . . . . .                                   | 541        |
| 52.1. Раскрытие неопределённости $\infty/\infty$ при $x \rightarrow a$ (или при $x \rightarrow a \pm 0$ ) . . . . .    | 541        |
| 52.2. Раскрытие неопределённости $\infty/\infty$ при $x \rightarrow \infty$ и при $x \rightarrow \pm\infty$ . . . . .  | 547        |
| 52.3. Раскрытие неопределённостей других видов . . . . .   | 554        |
| <b>Глава XIII. Определённый интеграл . . . . .</b>   | <b>565</b> |
| § 53. Интегральные суммы и интегрируемость . . . . .   | 565        |
| 53.1. Физические и геометрические задачи, приводящие к понятиям интегральной суммы и определённого интеграла . . . . . | 565        |
| 53.2. Определение интегральной суммы . . . . .   | 568        |
| 53.3. Интегрируемость функции на сегменте . . . . .  | 571        |
| § 54. Критерий интегрируемости по Риману . . . . .   | 575        |
| 54.1. Суммы Дарбу . . . . .  | 576        |
| 54.2. Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции (по Риману) . . . . .                                  | 588        |
| § 55. Интегрируемость непрерывных, кусочно-непрерывных и монотонных функций . . . . .                                  | 595        |
| 55.1. Интегрируемость непрерывных функций . . . . .  | 595        |
| 55.2. Интегрируемость кусочно-непрерывных функций . . . . .  | 596        |
| 55.3. Интегрируемость монотонных функций . . . . .   | 597        |
| § 56. Основные свойства определённого интеграла . . . . .  | 598        |
| 56.1. Интеграл от линейной комбинации и произведения функций . . . . .   | 598        |
| 56.2. Интегрируемость на частичном сегменте . . . . .  | 601        |
| 56.3. Аддитивность определённого интеграла . . . . .   | 601        |
| 56.4. Оценки определённых интегралов . . . . .   | 603        |
| 56.5. Формулы среднего значения . . . . .  | 605        |
| § 57. Основная формула интегрального исчисления (формула Ньютона–Лейбница) . . . . .                                   | 607        |
| 57.1. Определённый интеграл как функция верхнего предела . . . . .   | 607        |

|  |            |
|--|------------|
| 57.2. Формула Ньютона–Лейбница . . . . .   | 610        |
| 57.3. Геометрическая интерпретация формулы Ньютона–Лейбница . . . . .  | 614        |
| 57.4. Геометрические приложения определённого интеграла . . . . .  | 616        |
| <b>Глава XIV. Методы вычисления определённых интегралов . . . . .</b>  | <b>622</b> |
| <b>§ 58. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле . . . . .</b>   | <b>622</b> |
| 58.1. Замена переменной . . . . .  | 622        |
| 58.2. Интегрирование по частям . . . . .   | 624        |
| <b>§ 59. Приближённые методы вычисления определённого интеграла . . . . .</b>  | <b>625</b> |
| 59.1. Формула прямоугольников . . . . .  | 626        |
| 59.2. Формула трапеций . . . . .   | 631        |
| 59.3. Метод парабол (формула Симпсона) . . . . .   | 636        |
| 59.4. Примеры . . . . .  | 647        |
| <b>Глава XV. Несобственные интегралы . . . . .</b>   | <b>652</b> |
| <b>§ 60. Интегралы с бесконечными пределами . . . . .</b>  | <b>652</b> |
| 60.1. Понятие несобственного интеграла первого рода . . . . .  | 652        |
| 60.2. Критерий Коши для сходимости несобственного интеграла первого рода . . . . .   | 655        |
| 60.3. Общий признак сравнения . . . . .  | 657        |
| 60.4. Абсолютная и условная сходимости . . . . .   | 658        |
| 60.5. Признак сходимости Дирихле–Абеля . . . . .   | 660        |
| <b>§ 61. Интегралы от неограниченных функций . . . . .</b>   | <b>665</b> |
| 61.1. Понятие несобственного интеграла второго рода . . . . .  | 665        |
| 61.2. Критерий Коши для сходимости несобственного интеграла второго рода . . . . .   | 668        |
| 61.3. Общий признак сравнения . . . . .  | 670        |
| 61.4. Абсолютная и условная сходимости . . . . .   | 671        |
| <b>§ 62. Интегрирование по частям и замена переменной в несобственном интеграле; главное значение несобственного интеграла . . . . .</b> | <b>672</b> |
| 62.1. Интегрирование по частям . . . . .   | 672        |
| 62.2. Замена переменной . . . . .  | 674        |
| 62.3. Главное значение несобственного интеграла . . . . .  | 679        |
| Заключение . . . . .   | 681        |
| Список литературы . . . . .  | 682        |
| Предметный указатель . . . . .   | 684        |