

Д. Т. ПИСЬМЕННЫЙ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Высшее образование

16-е издание

МОСКВА



АЙРИС ПРЕСС

2019

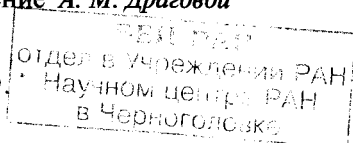
В11
П35
УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73-2
П35

Все права защищены.

Никакая часть данной книги не может переиздаваться или распространяться в любой форме и любыми средствами, электронными или механическими, включая фотокопирование, звукозапись, любые запоминающие устройства и системы поиска информации, без письменного разрешения правообладателя.

Серийное оформление *А. М. Драговой*

Б/инв.



Письменный, Д. Т.

П35 Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. — 16-е изд. — М. : АЙРИС-пресс, 2019. — 608 с. : ил. — (Высшее образование).

ISBN 978-5-8112-6472-8

Настоящий курс лекций предназначен для студентов, изучающих высшую математику в различных учебных заведениях.

Книга содержит необходимый материал по всем разделам курса высшей математики (линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия, основы математического анализа), которые обычно изучаются студентами на первом и втором курсах вуза, а также дополнительные главы, необходимые при изучении специальных курсов (двойные, тройные, криволинейные и поверхностные интегралы, дифференциальные уравнения, элементы теории поля и теории функций комплексного переменного, основы операционного исчисления).

Доступный, но строгий с научной точки зрения язык изложения, а также большое количество примеров и задач позволят студентам эффективно подготовиться к сдаче зачетов и экзаменов.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73-2

ISBN 978-5-8112-6472-8

© ООО «Издательство
«АЙРИС-пресс», 2002

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	15
-------------------	----

Глава I. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. Матрицы	16
1.1. Основные понятия	16
1.2. Действия над матрицами	17
§ 2. Определители	20
2.1. Основные понятия	20
2.2. Свойства определителей	22
§ 3. Невырожденные матрицы	24
3.1. Основные понятия	24
3.2. Обратная матрица	25
3.3. Ранг матрицы	27
§ 4. Системы линейных уравнений	29
4.1. Основные понятия	29
4.2. Решение систем линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли	30
4.3. Решение невырожденных линейных систем. Формулы Крамера	32
4.4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса ..	34
4.5. Системы линейных однородных уравнений	37

Глава II. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 5. Векторы	39
5.1. Основные понятия	39
5.2. Линейные операции над векторами	40
5.3. Проекция вектора на ось	42
5.4. Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы	44
5.5. Действия над векторами, заданными проекциями	45
§ 6. Скалярное произведение векторов и его свойства	47
6.1. Определение скалярного произведения	47
6.2. Свойства скалярного произведения	48
6.3. Выражение скалярного произведения через координаты	49
6.4. Некоторые приложения скалярного произведения	50
§ 7. Векторное произведение векторов и его свойства	51
7.1. Определение векторного произведения	51

7.2. Свойства векторного произведения	52
7.3. Выражение векторного произведения через координаты	53
7.4. Некоторые приложения векторного произведения	54
§ 8. Смешанное произведение векторов	55
8.1. Определение смешанного произведения, его геометрический смысл	55
8.2. Свойства смешанного произведения	55
8.3. Выражение смешанного произведения через координаты	56
8.4. Некоторые приложения смешанного произведения	57

Глава III. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 9. Система координат на плоскости	58
9.1. Основные понятия	58
9.2. Основные приложения метода координат на плоскости	60
9.3. Преобразование системы координат	61
§ 10. Линии на плоскости	64
10.1. Основные понятия	64
10.2. Уравнения прямой на плоскости	68
10.3. Прямая линия на плоскости. Основные задачи	73
§ 11. Линии второго порядка на плоскости	74
11.1. Основные понятия	74
11.2. Окружность	75
11.3. Эллипс	76
11.4. Гипербола	79
11.5. Парабола	84
11.6. Общее уравнение линий второго порядка	86

Глава IV. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 12. Уравнения поверхности и линии в пространстве	90
12.1. Основные понятия	90
12.2. Уравнения плоскости в пространстве	92
12.3. Плоскость. Основные задачи	96
12.4. Уравнения прямой в пространстве	98
12.5. Прямая линия в пространстве. Основные задачи	101
12.6. Прямая и плоскость в пространстве. Основные задачи	103
12.7. Цилиндрические поверхности	104

12.8. Поверхности вращения. Конические поверхности	106
12.9. Канонические уравнения поверхностей второго порядка	109

Глава V. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§ 13. Множества. Действительные числа	116
13.1. Основные понятия	116
13.2. Числовые множества. Множество действительных чисел	117
13.3. Числовые промежутки. Окрестность точки	119
§ 14. Функция	120
14.1. Понятие функции	120
14.2. Числовые функции. График функции. Способы задания функций	120
14.3. Основные характеристики функции	122
14.4. Обратная функция	123
14.5. Сложная функция	124
14.6. Основные элементарные функции и их графики	124
§ 15. Последовательности	127
15.1. Числовая последовательность	127
15.2. Предел числовой последовательности	128
15.3. Предельный переход в неравенствах	130
15.4. Предел монотонной ограниченной последовательности. Число e . Натуральные логарифмы	130
§ 16. Предел функции	132
16.1. Предел функции в точке	132
16.2. Односторонние пределы	134
16.3. Предел функции при $x \rightarrow \infty$	135
16.4. Бесконечно большая функция (б.б.ф.)	135
§ 17. Бесконечно малые функции (б.м.ф.)	136
17.1. Определения и основные теоремы	136
17.2. Связь между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией	140
17.3. Основные теоремы о пределах	141
17.4. Признаки существования пределов	144
17.5. Первый замечательный предел	145
17.6. Второй замечательный предел	146
§ 18. Эквивалентные бесконечно малые функции	148
18.1. Сравнение бесконечно малых функций	148
18.2. Эквивалентные бесконечно малые и основные теоремы о них	149

18.3. Применение эквивалентных бесконечно малых функций.....	151
§ 19. Непрерывность функций.....	153
19.1. Непрерывность функции в точке.....	153
19.2. Непрерывность функции в интервале и на отрезке.....	155
19.3. Точки разрыва функции и их классификация.....	155
19.4. Основные теоремы о непрерывных функциях. Непрерывность элементарных функций.....	158
19.5. Свойства функций, непрерывных на отрезке.....	159
§ 20. Производная функции.....	161
20.1. Задачи, приводящие к понятию производной.....	161
20.2. Определение производной; ее механический и геометрический смысл. Уравнение касательной и нормали к кривой.....	164
20.3. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции.....	166
20.4. Производная суммы, разности, произведения и частного функций.....	167
20.5. Производная сложной и обратной функций.....	169
20.6. Производные основных элементарных функций.....	171
20.7. Гиперболические функции и их производные.....	175
20.8. Таблица производных.....	177
§ 21. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций.....	179
21.1. Неявно заданная функция.....	179
21.2. Функция, заданная параметрически.....	180
§ 22. Логарифмическое дифференцирование.....	181
§ 23. Производные высших порядков.....	182
23.1. Производные высших порядков явно заданной функции.....	182
23.2. Механический смысл производной второго порядка.....	183
23.3. Производные высших порядков неявно заданной функции.....	183
23.4. Производные высших порядков от функций, заданных параметрически.....	184
§ 24. Дифференциал функции.....	185
24.1. Понятие дифференциала функции.....	185
24.2. Геометрический смысл дифференциала функции.....	186
24.3. Основные теоремы о дифференциалах.....	187
24.4. Таблица дифференциалов.....	188

24.5. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.....	189
24.6. Дифференциалы высших порядков.....	190
§ 25. Исследование функций при помощи производных.....	192
25.1. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях.....	192
25.2. Правила Лопиталя.....	196
25.3. Возрастание и убывание функций.....	200
25.4. Максимум и минимум функций.....	202
25.5. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.....	205
25.6. Выпуклость графика функции. Точки перегиба.....	207
25.7. Асимптоты графика функции.....	209
25.8. Общая схема исследования функции и построения графика.....	211
§ 26. Формула Тейлора.....	213
26.1. Формула Тейлора для многочлена.....	214
26.2. Формула Тейлора для произвольной функции.....	215

Глава VI. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 27. Понятие и представления комплексных чисел.....	218
27.1. Основные понятия.....	218
27.2. Геометрическое изображение комплексных чисел.....	218
27.3. Формы записи комплексных чисел.....	219
§ 28. Действия над комплексными числами.....	221
28.1. Сложение комплексных чисел.....	221
28.2. Вычитание комплексных чисел.....	221
28.3. Умножение комплексных чисел.....	222
28.4. Деление комплексных чисел.....	223
28.5. Извлечение корней из комплексных чисел.....	224

Глава VII. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 29. Неопределенный интеграл.....	226
29.1. Понятие неопределенного интеграла.....	226
29.2. Свойства неопределенного интеграла.....	227
29.3. Таблица основных неопределенных интегралов.....	230
§ 30. Основные методы интегрирования.....	232
30.1. Метод непосредственного интегрирования.....	232
30.2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной).....	234
30.3. Метод интегрирования по частям.....	236
§ 31. Интегрирование рациональных функций.....	237
31.1. Понятия о рациональных функциях.....	237

31.2. Интегрирование простейших рациональных дробей	244
31.3. Интегрирование рациональных дробей	246
§ 32. Интегрирование тригонометрических функций	248
32.1. Универсальная тригонометрическая подстановка	248
32.2. Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$	249
32.3. Использование тригонометрических преобразований	250
§ 33. Интегрирование иррациональных функций	251
33.1. Квадратичные иррациональности	251
33.2. Дробно-линейная подстановка	253
33.3. Тригонометрическая подстановка	254
33.4. Интегралы типа $\int R(x; \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$	255
33.5. Интегрирование дифференциального бинома	255
§ 34. «Берущиеся» и «неберущиеся» интегралы	256

Глава VIII. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 35. Определенный интеграл как предел интегральной суммы	259
§ 36. Геометрический и физический смысл определенного интеграла	261
§ 37. Формула Ньютона–Лейбница	263
§ 38. Основные свойства определенного интеграла	265
§ 39. Вычисления определенного интеграла	269
39.1. Формула Ньютона–Лейбница	269
39.2. Интегрирование подстановкой (заменой переменной)	269
39.3. Интегрирование по частям	271
39.4. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах	272
§ 40. Несобственные интегралы	273
40.1. Интеграл с бесконечным промежутком интегрирования (несобственный интеграл I рода)	273
40.2. Интеграл от разрывной функции (несобственный интеграл II рода)	276
§ 41. Геометрические и физические приложения определенного интеграла	278
41.1. Схемы применения определенного интеграла	278
41.2. Вычисление площадей плоских фигур	279
41.3. Вычисление длины дуги плоской кривой	283
41.4. Вычисление объема тела	287
41.5. Вычисление площади поверхности вращения	289
41.6. Механические приложения определенного интеграла	291
§ 42. Приближенное вычисление определенного интеграла	298
42.1. Формула прямоугольников	298

42.2. Формула трапеций	299
42.3. Формула парабол (Симпсона)	300

Глава IX. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 43. Функции двух переменных	304
43.1. Основные понятия	304
43.2. Предел функции	305
43.3. Непрерывность функции двух переменных	306
43.4. Свойства функций, непрерывных в ограниченной замкнутой области	307
§ 44. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных	308
44.1. Частные производные первого порядка и их геометрический смысл	308
44.2. Частные производные высших порядков	310
44.3. Дифференцируемость и полный дифференциал функции	311
44.4. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям	312
44.5. Дифференциалы высших порядков	313
44.6. Производная сложной функции. Полная производная	314
44.7. Инвариантность формы полного дифференциала	316
44.8. Дифференцирование неявной функции	317
§ 45. Касательная плоскость и нормаль к поверхности	318
§ 46. Экстремум функции двух переменных	320
46.1. Основные понятия	320
46.2. Необходимые и достаточные условия экстремума	321
46.3. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области	323

Глава X. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 47. Общие сведения о дифференциальных уравнениях	325
47.1. Основные понятия	325
47.2. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям	325
§ 48. Дифференциальные уравнения первого порядка	327
48.1. Основные понятия	327
48.2. Уравнения с разделяющимися переменными	330
48.3. Однородные дифференциальные уравнения	332
48.4. Линейные уравнения. Уравнение Я. Бернулли	334
48.5. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель	338

48.6. Уравнения Лагранжа и Клеро.....	342
§ 49. Дифференциальные уравнения высших порядков.....	344
49.1. Основные понятия.....	344
49.2. Уравнения, допускающие понижение порядка.....	346
49.3. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.....	349
49.4. Линейные однородные ДУ второго порядка.....	350
49.5. Линейные однородные ДУ n -го порядка.....	353
§ 50. Интегрирование ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.....	354
50.1. Интегрирование ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.....	354
50.2. Интегрирование ЛОДУ n -го порядка с постоянными коэффициентами.....	357
§ 51. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ).....	358
51.1. Структура общего решения ЛНДУ второго порядка....	358
51.2. Метод вариации произвольных постоянных.....	360
51.3. Интегрирование ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.....	362
51.4. Интегрирование ЛНДУ n -го порядка ($n > 2$) с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.....	365
§ 52. Системы дифференциальных уравнений.....	367
52.1. Основные понятия.....	367
52.2. Интегрирование нормальных систем.....	369
52.3. Системы линейных ДУ с постоянными коэффициентами.....	372

Глава XI. ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 53. Двойной интеграл.....	378
53.1. Основные понятия и определения.....	378
53.2. Геометрический и физический смысл двойного интеграла.....	379
53.3. Основные свойства двойного интеграла.....	381
53.4. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.....	382
53.5. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.....	386
53.6. Приложения двойного интеграла.....	388
§ 54. Тройной интеграл.....	391

54.1. Основные понятия.....	391
54.2. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.....	392
54.3. Замена переменных в тройном интеграле. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах.....	395
54.4. Некоторые приложения тройного интеграла.....	398

Глава XII. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 55. Криволинейный интеграл I рода.....	402
55.1. Основные понятия.....	402
55.2. Вычисление криволинейного интеграла I рода.....	404
55.3. Некоторые приложения криволинейного интеграла I рода.....	405
§ 56. Криволинейный интеграл II рода.....	407
56.1. Основные понятия.....	407
56.2. Вычисление криволинейного интеграла II рода.....	410
56.3. Формула Остроградского–Грина.....	412
56.4. Условия независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования.....	414
56.5. Некоторые приложения криволинейного интеграла II рода.....	418
§ 57. Поверхностный интеграл I рода.....	420
57.1. Основные понятия.....	420
57.2. Вычисление поверхностного интеграла I рода.....	422
57.3. Некоторые приложения поверхностного интеграла I рода.....	425
§ 58. Поверхностный интеграл II рода.....	427
58.1. Основные понятия.....	427
58.2. Вычисление поверхностного интеграла II рода.....	429
58.3. Формула Остроградского–Гаусса.....	431
58.4. Формула Стокса.....	433
58.5. Некоторые приложения поверхностного интеграла II рода.....	437

Глава XIII. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 59. Числовые ряды.....	438
59.1. Основные понятия.....	438
59.2. Ряд геометрической прогрессии.....	441
59.3. Необходимый признак сходимости числового ряда. Гармонический ряд.....	442

§ 60. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов.....	444
60.1. Признаки сравнения рядов.....	444
60.2. Признак Даламбера.....	446
60.3. Радиальный признак Коши.....	448
60.4. Интегральный признак Коши. Обобщенный гармонический ряд.....	449
§ 61. Знакопеременные и знакопеременные ряды.....	451
61.1. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница.....	451
61.2. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов.....	453
61.3. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов.....	454

Глава XIV. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

§ 62. Функциональные ряды.....	457
62.1. Основные понятия.....	457
§ 63. Сходимость степенных рядов.....	458
63.1. Теорема Н. Абея.....	458
63.2. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.....	459
63.3. Свойства степенных рядов.....	462
§ 64. Разложение функций в степенные ряды.....	463
64.1. Ряды Тейлора и Маклорена.....	463
64.2. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена).....	465
§ 65. Некоторые приложения степенных рядов.....	471
65.1. Приближенное вычисление значений функции.....	471
65.2. Приближенное вычисление определенных интегралов..	473
65.3. Приближенное решение дифференциальных уравнений.....	475

Глава XV. РЯДЫ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

§ 66. Ряды Фурье.....	478
66.1. Периодические функции. Периодические процессы.....	478
66.2. Тригонометрический ряд Фурье.....	480
§ 67. Разложение в ряд Фурье 2π -периодических функций.....	483
67.1. Теорема Дирихле.....	483
67.2. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций..	486
67.3. Разложение в ряд Фурье функций произвольного периода.....	487
67.4. Представление непериодической функции рядом Фурье.....	489

67.5. Комплексная форма ряда Фурье.....	491
§ 68. Интеграл Фурье.....	493

Глава XVI. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

§ 69. Основные понятия теории поля.....	499
§ 70. Скалярное поле.....	501
70.1. Поверхности и линии уровня.....	501
70.2. Производная по направлению.....	502
70.3. Градиент скалярного поля и его свойства.....	504
§ 71. Векторное поле.....	506
71.1. Векторные линии поля.....	506
71.2. Поток поля.....	507
71.3. Дивергенция поля. Формула Остроградского-Гаусса...	510
71.4. Циркуляция поля.....	513
71.5. Ротор поля. Формула Стокса.....	515
§ 72. Оператор Гамильтона.....	518
72.1. Векторные дифференциальные операции первого порядка.....	518
72.2. Векторные дифференциальные операции второго порядка.....	519
§ 73. Некоторые свойства основных классов векторных полей....	520
73.1. Соленоидальное поле.....	520
73.2. Потенциальное поле.....	521
73.3. Гармоническое поле.....	524

Глава XVII. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 74. Функции комплексного переменного.....	525
74.1. Основные понятия.....	525
74.2. Предел и непрерывность функции комплексного переменного.....	526
74.3. Основные элементарные функции комплексного переменного.....	527
74.4. Дифференцирование функции комплексного переменного. Условия Эйлера-Даламбера.....	532
74.5. Аналитическая функция. Дифференциал.....	535
74.6. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие о конформном отображении.....	538
§ 75. Интегрирование функции комплексного переменного.....	540
75.1. Определение, свойства и правила вычисления интеграла.....	540

75.2. Теорема Коши. Первообразная и неопределенный интеграл. Формула Ньютона–Лейбница	544
75.3. Интеграл Коши. Интегральная формула Коши	547
§ 76. Ряды в комплексной плоскости	551
76.1. Числовые ряды	551
76.2. Степенные ряды	553
76.3. Ряд Тейлора	555
76.4. Нули аналитической функции	558
76.5. Ряд Лорана	558
76.6. Классификация особых точек. Связь между нулем и полюсом функции	563
§ 77. Вычет функции	567
77.1. Понятие вычета и основная теорема о вычетах	567
77.2. Вычисление вычетов. Применение вычетов в вычислении интегралов	568

Глава XVIII. ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 78. Преобразование Лапласа	572
78.1. Оригиналы и их изображения	572
78.2. Свойства преобразования Лапласа	576
78.3. Таблица оригиналов и изображений	588
§ 79. Обратное преобразование Лапласа	590
79.1. Теоремы разложения	590
79.2. Формула Римана–Меллина	593
§ 80. Операционный метод решения линейных дифференциальных уравнений и их систем	594
Приложения	599