

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «СЕВЕРО-ОСЕТИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ КОСТА ЛЕВАНОВИЧА ХЕТАГУРОВА»

• • •

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ ИНСТИТУТ УПРАВЛЕНИЯ

**А. К. Баззаев**

**ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНЫЕ  
РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ  
ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА**

Владикавказ  
2019

ББК 22.193  
УДК 519.63

**Баззаев А.К.**

Локально-одномерные разностные схемы для уравнения диффузии дробного порядка: Монография / А.К. Баззаев; Сев.-Осет. гос. ун-т. – Владикавказ: ФГБОУ ВО «СОГУ им. К.Л. Хетагурова»: ИП Цопанова А.Ю., 2019. – 150 с.

ISBN 978-5-00081-246-4

**Рецензенты:**

доктор физико-математических наук, проф. **Р.Ч. Кулаев**;  
кандидат физико-математических наук **И.Д. Цопанов**

В монографии рассматриваются вопросы, связанные с построением и исследованием разностных схем для дифференциального уравнения диффузии дробного порядка в многомерной области. Изучение устойчивости соответствующих разностных схем сводится к получению априорных оценок для решений разностных краевых задач.

Данная книга посвящена локально-одномерным схемам для уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями третьего рода. В настоящей монографии реализуется одна общая алгоритмическая идея экономичных методов: процесс отыскания приближенного решения многомерной задачи разбивается на несколько этапов, на каждом из которых решается простая задача. Изучение устойчивости соответствующих разностных схем сводится к получению априорных оценок для решений разностных краевых задач.

Книга будет полезна для специалистов по вычислительной математике, прикладному математическому моделированию, для студентов старших курсов и аспирантов.

ББК 22.193  
УДК 519.63

ISBN 978-5-00081-246-4

© Баззаев А.К., 2019  
© СОГУ им. К.Л. Хетагурова, 2019  
© Владикавказский институт управления, 2019

# Оглавление

Введение .....	1
0.1 Предварительные замечания .....	5
0.2 Некоторые сведения из классического интегро - дифференциального исчисления .....	6
0.3 Гамма-функция .....	7
0.4 Дробные интегралы Римана-Лиувилля и дробные производные.....	10
0.4.1 Определение дробных интегралов и производных и их простейшие свойства .....	11
0.5 Дробная производная Капуто (регуляризованная дробная производная Римана-Лиувилля). .....	12
0.6 Один простой пример использования производных дробного порядка в приложениях.....	14
0.7 Основная идея метода написания локально - одномерных схем .....	16
0.8 Дискретный аналог производной дробного порядка.....	19
1 ЛОС для уравнения теплопроводности с краевыми условиями третьего рода	27
1.1 Постановка задачи .....	27
1.2 Локально-одномерная разностная схема .....	28
1.3 Погрешность аппроксимации локально-одномерной схемы .....	31
1.4 Устойчивость локально-одномерной схемы.....	34
1.5 Сходимость локально-одномерной схемы .....	37
2 Уравнение диффузии дробного порядка с краевыми условиями третьего рода .....	41
2.1 Многомерные разностные схемы для уравнения диффузии дробного порядка .....	41
2.1.1 Постановка задачи .....	41
2.1.2 Разностная схема .....	42
2.1.3 Устойчивость разностной схемы .....	43
2.1.4 Сходимость разностной схемы.....	48
2.2 Локально-одномерные схемы для уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями третьего рода.....	49
2.2.1 Локально-одномерная разностная схема .....	49
2.2.2 Погрешность аппроксимации локально-одномерной разностной схемы .....	53
2.2.3 Устойчивость локально-одномерной разностной схемы.....	56

2.2.4	Равномерная сходимость локально-одномерной разностной схемы	63
3	Локально-одномерные схемы для уравнения диффузии дробного порядка с конвекцией	67
3.1	Уравнение диффузии дробного порядка с конвекцией	67
3.1.1	Постановка задачи	67
3.1.2	Локально-одномерная разностная схема	68
3.1.3	Погрешность аппроксимации локально-одномерной разностной схемы	72
3.1.4	Устойчивость локально-одномерной разностной схемы	74
3.1.5	Равномерная сходимость локально-одномерной разностной схемы	81
3.2	Уравнение диффузии дробного порядка с дробной производной в младших членах	83
3.2.1	Постановка задачи	83
3.2.2	Локально-одномерная разностная схема	84
3.2.3	Погрешность аппроксимации локально-одномерной разностной схемы	85
3.2.4	Устойчивость локально-одномерной разностной схемы	87
3.2.5	Равномерная сходимость локально-одномерной разностной схемы	92
4	Уравнение теплопроводности дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью	95
4.1	Постановка задачи	95
4.2	Локально-одномерная разностная схема	95
4.3	Погрешность аппроксимации локально-одномерной разностной схемы	98
4.4	Устойчивость локально-одномерной разностной схемы	100
4.5	Равномерная сходимость локально-одномерной разностной схемы	104
5	Локально-одномерные схемы для параболического уравнения с нелокальным условием	107
5.1	Постановка задачи	107
5.2	Локально-одномерная разностная схема	107
5.3	Погрешность аппроксимации локально-одномерной разностной схемы	109
5.4	Устойчивость локально-одномерной разностной схемы	112
5.5	Сходимость локально-одномерной разностной схемы	117
6	Локально-одномерные схемы для уравнения диффузии дробного порядка в произвольной области	119
6.1	Постановка задачи	119
6.2	Локально-одномерные разностные схемы	120
6.3	Погрешность аппроксимации локально-одномерной схемы	122
6.4	Устойчивость локально-одномерной схемы	124
6.5	Равномерная сходимость локально-одномерной схемы	129
7	ЛОС для уравнения дробного порядка по пространственным переменным	131
7.1	Постановка задачи	131
7.2	Локально-одномерная схема	132
7.3	Погрешность аппроксимации локально-одномерной схемы	133
7.4	Равномерная сходимость локально-одномерной схемы	135

7.5	Априорная оценка	135
	Список литературы	139