

БНЦ  
бр

Дмитрий Письменный

# КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по теории вероятностей,  
математической статистике  
и случайным процессам

Высшее образование

9-е издание

МОСКВА



АЙРИС ПРЕСС

2020

85  
КОНТРОЛЬНЫЙ  
ЭКЗЕМПЛЯР

УДК 519.2(075.8)  
ББК 22.17я73-2  
ПЗ5

Все права защищены.

Никакая часть данной книги не может переиздаваться или распространяться в любой форме и любыми средствами, электронными или механическими, включая фотокопирование, звукозапись, любые запоминающие устройства и системы поиска информации, без письменного разрешения правообладателя.

Серийное оформление *А. М. Драговой*

**Письменный, Д. Т.**

**ПЗ5** Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Дмитрий Письменный. — 9-е изд. — М.: АЙРИС-пресс, 2020. — 288 с. — (Высшее образование).

**ISBN 978-5-8112-6085-0**

Настоящая книга представляет собой курс лекций по теории вероятностей, случайным процессам и математической статистике.

Первая часть книги содержит основные понятия и теоремы теории вероятностей, такие как случайные события, вероятность, случайные функции, корреляция, условная вероятность, закон больших чисел и предельные теоремы. В отдельной главе приведены основные понятия теории случайных процессов (стационарный процесс, марковский процесс, теорема Винера—Хинчина).

Вторая часть книги посвящена математической статистике, в ней излагаются основы выборочного метода, теории оценок и проверки гипотез. Изложение теоретического материала сопровождается рассмотрением большого количества примеров и задач, ведется на доступном, по возможности строгом языке.

Предназначена для студентов экономических и технических вузов.

отдел в Учреждении РАН  
Научном центре РАН  
в Черноголовке

УДК 519.2(075.8)  
ББК 22.17я73-2

*8/umb.*  
**ISBN 978-5-8112-6085-0**

© ООО «Издательство  
«АЙРИС-пресс», 2006

# Содержание

Введение .....	6
----------------	---

## Раздел первый

### Элементарная теория вероятностей и случайных процессов

#### Глава 1. Случайные события

1.1. Предмет теории вероятностей .....	8
1.2. Случайные события, их классификация .....	9
1.3. Действия над событиями .....	11
1.4. Случайные события. Алгебра событий. (Теоретико-множественная трактовка) .....	13
1.5. Свойство статистической устойчивости относительной частоты события .....	16
1.6. Статистическое определение вероятности .....	17
1.7. Классическое определение вероятности .....	18
1.8. Элементы комбинаторики .....	20
1.9. Примеры вычисления вероятностей .....	28
1.10. Геометрическое определение вероятности .....	31
1.11. Аксиоматическое определение вероятности .....	34
1.12. Свойства вероятностей .....	35
1.13. Конечное вероятностное пространство .....	36
1.14. Условные вероятности .....	37
1.15. Вероятность произведения событий. Независимость событий .....	38
1.16. Вероятность суммы событий .....	42
1.17. Формула полной вероятности .....	44
1.18. Формула Байеса (теорема гипотез) .....	45
1.19. Независимые испытания. Схема Бернулли .....	47
1.20. Формула Бернулли .....	48
1.21. Предельные теоремы в схеме Бернулли .....	51

#### Глава 2. Случайные величины

2.1. Понятие случайной величины. Закон распределения случайной величины .....	60
2.2. Закон распределения дискретной случайной величины. Многоугольник распределения .....	61
2.3. Функция распределения и ее свойства. Функция распределения дискретной случайной величины .....	64
2.4. Плотность распределения и ее свойства .....	69
2.5. Числовые характеристики случайных величин .....	73
2.6. Производящая функция .....	84
2.7. Основные законы распределения случайных величин .....	85

**Глава 3. Системы случайных величин**

3.1. Понятие о системе случайных величин и законе ее распределения . . . . .	104
3.2. Функция распределения двумерной случайной величины и ее свойства . .	107
3.3. Плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины и ее свойства . . . . .	110
3.4. Зависимость и независимость двух случайных величин . . . . .	116
3.5. Условные законы распределения . . . . .	118
3.6. Числовые характеристики двумерной случайной величины. Математическое ожидание и дисперсия . . . . .	122
3.7. Корреляционный момент, коэффициент корреляции . . . . .	124
3.8. Двумерное нормальное распределение . . . . .	131
3.9. Регрессия. Теорема о нормальной корреляции . . . . .	135
3.10. Многомерная ( $n$ -мерная) случайная величина (общие сведения) . . . . .	139
3.11. Характеристическая функция и ее свойства . . . . .	140
3.12. Характеристическая функция нормальной случайной величины . . . . .	143

**Глава 4. Функции случайных величин**

4.1. Функция одного случайного аргумента . . . . .	145
4.2. Функции двух случайных аргументов . . . . .	150
4.3. Распределение функций нормальных случайных величин . . . . .	158

**Глава 5. Предельные теоремы теории вероятностей**

5.1. Неравенство Чебышева . . . . .	162
5.2. Теорема Чебышева . . . . .	165
5.3. Теорема Бернулли . . . . .	168
5.4. Центральная предельная теорема . . . . .	170
5.5. Интегральная теорема Муавра–Лапласа . . . . .	172

**Глава 6. Основы теории случайных процессов**

6.1. Понятие случайной функции (процесса) . . . . .	176
6.2. Классификация случайных процессов . . . . .	178
6.3. Основные характеристики случайного процесса . . . . .	179
6.4. Стационарный случайный процесс в узком и широком смысле . . . . .	187
6.5. Линейные и нелинейные преобразования случайных процессов . . . . .	190
6.6. Дифференцирование и интегрирование случайных процессов . . . . .	191
6.7. Спектральное разложение стационарного случайного процесса . . . . .	194
6.8. Спектральная плотность случайного процесса. Теорема Винера–Хинчина . . . . .	197
6.9. Стационарный белый шум . . . . .	201
6.10. Понятие марковского случайного процесса . . . . .	203
6.11. Дискретный марковский процесс. Цепь Маркова . . . . .	205
6.12. Понятие о непрерывном марковском процессе. Уравнения Колмогорова . . . . .	207

## Раздел второй

### Основы математической статистики

#### Глава 7. Выборки и их характеристики

7.1. Предмет математической статистики .....	212
7.2. Генеральная и выборочная совокупности .....	213
7.3. Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения .....	215
7.4. Графическое изображение статистического распределения .....	219
7.5. Числовые характеристики статистического распределения .....	221

#### Глава 8. Элементы теории оценок и проверки гипотез

8.1. Оценка неизвестных параметров .....	225
8.2. Методы нахождения точечных оценок .....	231
8.3. Понятие интервального оценивания параметров .....	236
8.4. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения .....	238
8.5. Проверка статистических гипотез .....	244
8.6. Проверка гипотез о законе распределения .....	248

Ответы к упражнениям .....	255
----------------------------	-----

Приложения .....	285
------------------	-----