

БНЦ

И. М. Аксененкова, О. А. Малыгина,  
Н. С. Чекалкин, А. Г. Шухов

**РЯДЫ**



**ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ  
И  
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ  
ФУРЬЕ**



**ПРИЛОЖЕНИЯ**

Допущено  
научно-методическим советом по математике  
Министерства образования и науки Российской Федерации  
в качестве учебного пособия для студентов  
высших учебных заведений, обучающихся по техническим  
направлениям подготовки

Издание второе,  
исправленное и дополненное.



URSS  
МОСКВА

ББК 22.161 22.1я73

**Аксененкова Ирина Марковна,  
Малыгина Ольга Анатольевна,  
Чекалкин Николай Степанович,  
Шухов Алексей Георгиевич**

**Ряды. Интеграл Фурье и преобразование Фурье. Приложения.**  
Изд. 2-е, испр. и доп. — М.: ЛЕНАНД, 2020. — 240 с.

Настоящее пособие обеспечивает совершенствование математической подготовки современных дипломированных специалистов, бакалавров, магистров. Предлагаемый читателю материал раскрывает взаимосвязи высшей математики с некоторыми специальными дисциплинами технического университета (вуза), демонстрирует применение математики при курсовом и дипломном проектировании. Пособие одновременно является и курсом лекций, и задачником. Особенностью данной работы является ориентация на формирование мотивации студентов к активному изучению математики.

Пособие рассчитано на подготовку студентов, обучающихся по техническим направлениям подготовки. Материал может использоваться в системе повышения квалификации преподавателей, в системе дополнительного образования.

**Рецензенты:**

д-р физ.-мат. наук, проф. *К. Ю. Осипенко*;  
д-р физ.-мат. наук, проф. *Г. Г. Магарил-Ильяев*

Формат 60×90/16. Печ. л. 15. Зак. № АП-6147.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».

117312, Москва, проспект 60-летия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-9710-7123-5

© ЛЕНАНД, 2019

24913 ID



НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА	
 URSS	E-mail: URSS@URSS.ru
	Каталог изданий в Интернете: <a href="http://URSS.ru">http://URSS.ru</a>
	Тел./факс (многоканальный): + 7 (499) 724 25 45

Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

# Содержание

<b>Введение .....</b>	<b>7</b>
<b>Глава 1. Теория рядов.....</b>	<b>9</b>
<b>§ 1. Числовые ряды .....</b>	<b>9</b>
1.1. Числовой ряд, сходимость числового ряда.....	11
1.2. Геометрическая прогрессия .....	14
1.3. Гармонический ряд .....	15
<b>§ 2. Свойства сходящихся рядов .....</b>	<b>18</b>
2.1. Необходимое условие сходимости числового ряда .....	18
2.2. Остаток ряда .....	19
2.3. Критерий Коши сходимости рядов.....	19
2.4. Линейные действия с рядами.....	21
<b>§ 3. Числовые ряды с неотрицательными членами .....</b>	<b>22</b>
3.1. Признаки сравнения.....	22
3.2. Признак Даламбера.....	25
3.3. Радиальный признак Коши.....	27
3.4. Интегральный признак Коши .....	30
3.5. Признак Раабе.....	34
3.6. Признак Бертрана.....	36
3.7. Признак Гаусса.....	36
3.8. Логарифмический признак.....	37
<b>§ 4. Знакопеременные числовые ряды .....</b>	<b>40</b>
4.1. Ряд Лейбница.....	40
4.2. Абсолютная и условная сходимость .....	43
4.3. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.....	47
<b>§ 5. Числовые ряды с комплексными членами .....</b>	<b>49</b>
<b>§ 6. Функциональные ряды .....</b>	<b>51</b>
6.1. Функциональный ряд, его область сходимости .....	51
6.2. Равномерная сходимость функционального ряда .....	51
6.3. Теорема Вейерштрасса (достаточное условие равномерной сходимости).....	54
<b>§ 7. Свойства равномерно сходящихся рядов .....</b>	<b>58</b>
7.1. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда .....	58
7.2. Почленное интегрирование.....	59
7.3. Почленное дифференцирование .....	60

<b>§ 8. Степенные ряды</b> .....	<b>62</b>
8.1. Теорема Абеля .....	62
8.2. Интервал и радиус сходимости степенного ряда .....	63
8.3. Равномерная сходимость степенного ряда, его почленное интегрирование и дифференцирование .....	66
<b>§ 9. Степенные ряды с комплексными членами</b> .....	<b>70</b>
<b>§ 10. Ряд Тейлора</b> .....	<b>74</b>
10.1. Представление функций степенными рядами .....	74
10.2. Условие сходимости ряда Тейлора заданной функции к этой функции .....	76
10.3. Единственность представления функции степенным рядом .....	77
10.4. Разложение основных элементарных функций .....	78
10.5. Разложение функций в ряд Тейлора с использованием известных разложений .....	78
10.6. Приближенные вычисления значений функций и определенных интегралов .....	80
<b>§ 11. Тригонометрический ряд Фурье</b> .....	<b>84</b>
11.1. Тригонометрический ряд Фурье. Коэффициенты Фурье .....	86
11.2. Теорема Дирихле .....	88
11.3. Сходимость в среднем тригонометрического ряда Фурье .....	90
11.4. Представление рядом Фурье функции произвольного периода .....	92
11.5. Тригонометрический ряд Фурье для четных и нечетных функций .....	93
11.6. Разложение функций, заданных на полупериоде, в ряд Фурье только по косинусам или только по синусам .....	94
11.6.1. Разложение по косинусам .....	95
11.6.2. Разложение по синусам .....	96
<b>§ 12. Комплексная форма ряда Фурье</b> .....	<b>100</b>
<b>§ 13. Задача о наилучшем приближении тригонометрическим многочленом</b> .....	<b>103</b>
<b>Глава 2. Приложения теории рядов</b> .....	<b>105</b>
<b>§ 1. Применение теории рядов в математическом анализе</b> .....	<b>105</b>
1.1. Некоторые методы нахождения сумм числовых и функциональных рядов .....	106
1.1.1. Нахождение суммы ряда по определению .....	106
1.1.2. Нахождение суммы числового ряда с помощью ряда Тейлора .....	108
1.1.3. Нахождение суммы ряда с помощью дифференцирования и интегрирования ряда .....	108
1.1.4. Нахождение суммы числового ряда с помощью ряда Фурье и равенства Парсеваля .....	109

1.1.5. Вычисление суммы числового ряда с помощью основной теоремы о вычетах .....	111
1.2. Вычисление определенных и несобственных интегралов с помощью рядов .....	119
1.3. Вычисление предела последовательности с помощью теории рядов .....	121
1.4. Вычисление значения производной функции в точке .....	123
1.5. Теория рядов — основа теории функций комплексной переменной .....	125
1.6. Использование степенных рядов для доказательства тождеств .....	127
Рекомендуемая литература .....	129
<b>§ 2. Применение теории рядов к решению алгебраических и линейных дифференциальных уравнений</b> .....	<b>130</b>
2.1. Применение теории рядов к решению алгебраических уравнений .....	130
2.2. Применение теории рядов к решению линейных дифференциальных уравнений .....	132
Рекомендуемая литература .....	135
<b>§ 3. Применение теории рядов в математической физике</b> .....	<b>136</b>
3.1. Функции Бесселя .....	136
3.2. Решение уравнения колебаний струны методом Фурье .....	138
3.3. Решение уравнения продольных колебаний стержня методом Фурье .....	145
3.4. Метод Фурье решения уравнения теплопроводности для ограниченного стержня .....	148
Рекомендуемая литература .....	151
3.5. Решение задачи Дирихле методом Фурье для уравнения Лапласа в круге .....	151
<b>§ 4. Применение рядов в теории вероятностей</b> .....	<b>156</b>
4.1. Производящая функция .....	156
4.2. Сумма случайного числа случайных величин .....	161
4.3. Вероятностная задача Чебышева о несократимых дробях .....	163
4.4. Лемма Бореля—Кантелли .....	164
4.5. Ряды со случайными слагаемыми .....	165
Рекомендуемая литература .....	168
<b>§ 5. Применение рядов в теории чисел</b> .....	<b>169</b>
5.1. Дзета-функция Римана и простые числа .....	169
5.2. Доказательство иррациональности числа $e$ с использованием теории рядов .....	170
<b>§ 6. Периодические сигналы и их спектры</b> .....	<b>171</b>
Рекомендуемая литература .....	178

<b>§ 7. Применение теории рядов в дискретной математике .....</b>	<b>179</b>
7.1. Теория рядов и разностные уравнения.....	179
7.2. Теория рядов и комбинаторика. Применение производящих функций в комбинаторике .....	182
Рекомендуемая литература.....	188
<b>§ 8. Z-преобразование и его применения.....</b>	<b>189</b>
Рекомендуемая литература.....	195
 <b>Глава 3. Интеграл Фурье, преобразование Фурье и их приложения.....</b>	 <b>196</b>
<b>§ 1. Формула Фурье. Преобразование Фурье .....</b>	<b>196</b>
1.1. Интеграл Фурье: аналогия с рядами.....	196
1.2. Формула Фурье, преобразование Фурье: основные понятия .....	198
1.3. Интеграл Фурье для четных и нечетных функций. Косинус- и синус-преобразования Фурье .....	201
1.4. Свойства преобразования Фурье .....	207
<b>§ 2. Некоторые приложения интеграла Фурье и преобразования Фурье .....</b>	<b>211</b>
2.1. Математический анализ: вычисление несобственных интегралов....	211
2.2. Преобразование Фурье — математическая основа теории автоматического управления. Частотные характеристики.....	214
Рекомендуемая литература.....	218
2.3. Решение уравнения распространения тепла в неограниченном стержне.....	218
Рекомендуемая литература.....	220
2.4. Преобразование Фурье в теории вероятностей .....	220
Рекомендуемая литература.....	224
2.5. Спектральное разложение стационарных случайных процессов....	224
Рекомендуемая литература.....	230
2.6. Спектры непериодических сигналов и преобразование Фурье в радиотехнике .....	230
2.6.1. Спектры непериодических сигналов и их свойства.....	230
2.6.2. Применение преобразования Фурье в радиотехнике и электрических системах: спектральный метод в линейной теории .....	236
Рекомендуемая литература.....	237
 <b>Заключение .....</b>	 <b>238</b>
 <b>Литература.....</b>	 <b>239</b>