

В. А. Зорич

УДК 217  
ББК 22.16  
386

# Математический анализ

## Часть I

Издание десятое,  
исправленное

Рекомендовано УМО по классическому университетскому образованию  
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по специальности

01.05.01 Фундаментальная математика и механика

и направлениям

01.03.01 Математика,

01.03.03 Механика и математическое моделирование,

02.03.01 Математика и компьютерные науки



Издательство МЦНМО

Москва, 2020

УДК 517  
ББК 22.16  
386

Рецензенты:

Отдел теории функций комплексного переменного  
Математического института им. В. А. Стеклова  
Российской академии наук  
Заведующий отделом академик А. А. Гончар  
Академик В. И. Арнольд

**Зорич В. А.**

386 Математический анализ. Часть I. — Изд. 10-е, испр. — М.: МЦНМО, 2020. — xii + 564 с. Библи.: 54 назв. Илл.: 65.  
ISBN 978-5-4439-4029-8, 978-5-4439-4030-4 (часть I).

Университетский учебник для студентов физико-математических специальностей. Может быть полезен студентам факультетов и вузов с расширенной математической подготовкой, а также специалистам в области математики и ее приложений.

ББК 22.16

*«Полная строгость изложения соединена с доступностью и полнотой, а также воспитанием привычки иметь дело с реальными задачами естествознания».*  
— Из отзыва академика А. Н. Колмогорова о первом издании учебника.

Учебное издание для вузов

Владимир Антонович Зорич

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ I

ISBN 978-5-4439-4030-4



9 785443 940304 >

Подписано в печать 25.09.2019 г. Формат 70 × 100/16.

Печ. л. 36. Тираж 1500 экз. Заказ № ВЗК-05507-19.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04

Отпечатано в АО «Первая Образцовая типография», филиал «Дом печати — ВЯТКА»  
610033, г. Киров, ул. Московская, 122. [www.gipp.kirov.ru](http://www.gipp.kirov.ru); e-mail: [order@gipp.kirov.ru](mailto:order@gipp.kirov.ru)

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,  
Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (495) 745-80-31. E-mail: [biblio@mcsme.ru](mailto:biblio@mcsme.ru)

ISBN 978-5-4439-4029-8 © В. А. Зорич, 2001—2020.  
ISBN 978-5-4439-4030-4 (часть I) © Издательство МЦНМО, 2020.

# Оглавление

Из предисловия к первому изданию .....	viii
Из предисловия ко второму изданию .....	xi
Предисловие к седьмому изданию .....	xi
<b>Глава I. Некоторые общематематические понятия и обозначения</b> .....	<b>1</b>
§ 1. Логическая символика .....	1
1. Связки и скобки (1). 2. Замечания о доказательствах (2). 3. Некоторые специальные обозначения (3). 4. Заключительные замечания (3). Упражнения (4)	
§ 2. Множества и элементарные операции над множествами .....	4
1. Понятие множества (4). 2. Отношение включения (6). 3. Простейшие операции над множествами (7). Упражнения (10)	
§ 3. Функция .....	10
1. Понятие функции (отображения) (10). 2. Простейшая классификация отображений (14). 3. Композиция функций и взаимно обратные отображения (16). 4. Функция как отношение. График функции (18). Упражнения (21)	
§ 4. Некоторые дополнения .....	23
1. Мощность множества (кардинальные числа) (23). 2. Об аксиоматике теории множеств (25). 3. Замечания о структуре математических высказываний и записи их на языке теории множеств (27). Упражнения (29)	
<b>Глава II. Действительные (вещественные) числа</b> .....	<b>32</b>
§ 1. Аксиоматика и некоторые общие свойства множества действительных чисел .....	32
1. Определение множества действительных чисел (32). 2. Некоторые общие алгебраические свойства действительных чисел (36). 3. Аксиома полноты и существование верхней (нижней) грани числового множества (39)	
§ 2. Важнейшие классы действительных чисел и вычислительные аспекты операций с действительными числами .....	41
1. Натуральные числа и принцип математической индукции (41). 2. Рациональные и иррациональные числа (44). 3. Принцип Архимеда (48).	

4. Геометрическая интерпретация множества действительных чисел и вычислительные аспекты операций с действительными числами (49). Задачи и упражнения (61)	
§ 3. Основные леммы, связанные с полнотой множества действительных чисел.....	65
1. Лемма о вложенных отрезках (принцип Коши—Кантора) (65). 2. Лемма о конечном покрытии (принцип Бореля—Лебега) (66). 3. Лемма о предельной точке (принцип Больцано—Вейерштрасса) (66). Задачи и упражнения (67)	
§ 4. Счетные и несчетные множества.....	68
1. Счетные множества (68). 2. Мощность континуума (70). Задачи и упражнения (71)	
<b>Глава III. Предел</b>	<b>72</b>
§ 1. Предел последовательности.....	72
1. Определения и примеры (72). 2. Свойства предела последовательности (74). 3. Вопросы существования предела последовательности (78). 4. Начальные сведения о рядах (87). Задачи и упражнения (96).	
§ 2. Предел функции.....	98
1. Определения и примеры (98). 2. Свойства предела функции (102). 3. Общее определение предела функции (предел по базе) (117). 4. Вопросы существования предела функции (121). Задачи и упражнения (135).	
<b>Глава IV. Непрерывные функции</b>	<b>138</b>
§ 1. Основные определения и примеры.....	138
1. Непрерывность функции в точке (138). 2. Точки разрыва (142).	
§ 2. Свойства непрерывных функций.....	145
1. Локальные свойства (145). 2. Глобальные свойства непрерывных функций (147). Задачи и упражнения (155).	
<b>Глава V. Дифференциальное исчисление</b>	<b>160</b>
§ 1. Дифференцируемая функция.....	160
1. Задача и наводящие соображения (160). 2. Функция, дифференцируемая в точке (165). 3. Касательная; геометрический смысл производной и дифференциала (167). 4. Роль системы координат (170). 5. Некоторые примеры (172). Задачи и упражнения (177).	
§ 2. Основные правила дифференцирования.....	178
1. Дифференцирование и арифметические операции (178). 2. Дифференцирование композиции функций (181). 3. Дифференцирование обратной функции (184). 4. Таблица производных основных элементарных функций (188). 5. Дифференцирование простейшей неявно заданной функции (189). 6. Производные высших порядков (193). Задачи и упражнения (197).	

§ 3. Основные теоремы дифференциального исчисления.....	198
1. Лемма Ферма и теорема Ролля (198). 2. Теоремы Лагранжа и Коши о конечном приращении (200). 3. Формула Тейлора (203). Задачи и упражнения (214).	
§ 4. Исследование функций методами дифференциального исчисления.....	217
1. Условия монотонности функции (217). 2. Условия внутреннего экстремума функции (218). 3. Условия выпуклости функции (224). 4. Правило Лопиталья (230). 5. Построение графика функции (232). Задачи и упражнения (240).	
§ 5. Комплексные числа и взаимосвязь элементарных функций.....	244
1. Комплексные числа (244). 2. Сходимость в $\mathbb{C}$ и ряды с комплексными членами (247). 3. Формула Эйлера и взаимосвязь элементарных функций (251). 4. Представление функции степенным рядом, аналитичность (255). 5. Алгебраическая замкнутость поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел (259). Задачи и упражнения (265).	
§ 6. Некоторые примеры использования дифференциального исчисления в задачах естествознания.....	267
1. Движение тела переменной массы (267). 2. Барометрическая формула (269). 3. Радиоактивный распад, цепная реакция и атомный котел (270). 4. Падение тел в атмосфере (273). 5. Еще раз о числе $e$ и функции $\exp x$ (274). 6. Колебания (277). Задачи и упражнения (280).	
§ 7. Первообразная.....	284
1. Первообразная и неопределенный интеграл (284). 2. Основные общие приемы отыскания первообразной (286). 3. Первообразные рациональных функций (291). 4. Первообразные вида $\int R(\cos x, \sin x) dx$ (295). 5. Первообразные вида $\int R(x, y(x)) dx$ (297). Задачи и упражнения (300).	
<b>Глава VI. Интеграл</b>	<b>305</b>
§ 1. Определение интеграла и описание множества интегрируемых функций.....	305
1. Задача и наводящие соображения (305). 2. Определение интеграла Римана (306). 3. Множество интегрируемых функций (308). Задачи и упражнения (320).	
§ 2. Линейность, аддитивность и монотонность интеграла.....	321
1. Интеграл как линейная функция на пространстве $\mathcal{R}[a, b]$ (321). 2. Интеграл как аддитивная функция отрезка интегрирования (322). 3. Оценка интеграла, монотонность интеграла, теоремы о среднем (325). Задачи и упражнения (332).	
§ 3. Интеграл и производная.....	333
1. Интеграл и первообразная (333). 2. Формула Ньютона—Лейбница (335). 3. Интегрирование по частям в определенном интеграле и фор-	

мула Тейлора (336). 4. Замена переменной в интеграле (338). 5. Некоторые примеры (340). Задачи и упражнения (344).	
§ 4. Некоторые приложения интеграла.....	347
1. Аддитивная функция ориентированного промежутка и интеграл (347). 2. Длина пути (349). 3. Площадь криволинейной трапеции (355). 4. Объем тела вращения (356). 5. Работа и энергия (356). Задачи и упражнения (362).	
§ 5. Несобственный интеграл.....	363
1. Определения, примеры и основные свойства несобственных интегралов (363). 2. Исследование сходимости несобственного интеграла (368). 3. Несобственные интегралы с несколькими особенностями (373). Задачи и упражнения (376).	
<b>Глава VII. Функции многих переменных, их предел и непрерывность</b>	<b>378</b>
§ 1. Пространство $\mathbb{R}^m$ и важнейшие классы его подмножеств.....	378
1. Множество $\mathbb{R}^m$ и расстояние в нем (378). 2. Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^m$ (380). 3. Компакты в $\mathbb{R}^m$ (382). Задачи и упражнения (384).	
§ 2. Предел и непрерывность функции многих переменных.....	384
1. Предел функции (384). 2. Непрерывность функции многих переменных и свойства непрерывных функций (389). Задачи и упражнения (394).	
<b>Глава VIII. Дифференциальное исчисление функций многих переменных</b>	<b>395</b>
§ 1. Векторная структура в $\mathbb{R}^m$ .....	395
1. $\mathbb{R}^m$ как векторное пространство (395). 2. Линейные отображения $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ (396). 3. Норма в $\mathbb{R}^m$ (397). 4. Евклидова структура в $\mathbb{R}^m$ (398).	
§ 2. Дифференциал функции многих переменных.....	400
1. Дифференцируемость и дифференциал функции в точке (400). 2. Дифференциал и частные производные вещественнозначной функции (401). 3. Координатное представление дифференциала отображения. Матрица Якоби (403). 4. Непрерывность, частные производные и дифференцируемость функции в точке (404).	
§ 3. Основные законы дифференцирования.....	405
1. Линейность операции дифференцирования (405). 2. Дифференцирование композиции отображений (407). 3. Дифференцирование обратного отображения (412). Задачи и упражнения (414).	
§ 4. Основные факты дифференциального исчисления вещественнозначных функций многих переменных.....	419
1. Теорема о среднем (419). 2. Достаточное условие дифференцируемости функции многих переменных (421). 3. Частные производные выс-	

шего порядка (422). 4. Формула Тейлора (425). 5. Экстремумы функций многих переменных (427). 6. Некоторые геометрические образы, связанные с функциями многих переменных (433). Задачи и упражнения (437).	
§ 5. Теорема о неявной функции.....	443
1. Постановка вопроса и наводящие соображения (443). 2. Простейший вариант теоремы о неявной функции (445). 3. Переход к случаю зависимости $F(x^1, \dots, x^m, y) = 0$ (449). 4. Теорема о неявной функции (451). Задачи и упражнения (455).	
§ 6. Некоторые следствия теоремы о неявной функции.....	459
1. Теорема об обратной функции (459). 2. Локальное приведение гладкого отображения к каноническому виду (464). 3. Зависимость функций (468). 4. Локальное разложение диффеоморфизма в композицию простейших (469). 5. Лемма Морса (472). Задачи и упражнения (475).	
§ 7. Поверхность в $\mathbb{R}^n$ и теория условного экстремума.....	476
1. Поверхность размерности $k$ в $\mathbb{R}^n$ (476). 2. Касательное пространство (481). 3. Условный экстремум (486). Задачи и упражнения (497)	
Некоторые задачи коллоквиумов.....	502
Вопросы к экзамену.....	511
<b>Дополнения</b>	<b>515</b>
1. Математический анализ (вводная лекция для первого курса).....	515
2. Начальные сведения о численных методах решения уравнений....	523
3. Преобразование Лежандра (первое обсуждение).....	526
4. Интеграл Римана—Стилтьеса, дельта-функция и идея обобщенных функций (начальные представления).....	529
5. Формула Эйлера—Маклорена.....	537
6. Теорема о неявной функции (альтернативное изложение).....	542
Литература.....	550
Предметный указатель.....	553
Указатель имен.....	563