

Федеральный исследовательский центр  
Институт прикладной физики  
Российской академии наук

Институт проблем машиностроения РАН

**В. И. Ерофеев, И. С. Павлов**

# **СТРУКТУРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТАМАТЕРИАЛОВ**

Нижний Новгород  
ИПФ РАН  
2019

УДК 539.3:534.22  
ББК 22.251в6  
Е78

Издано по решению редакционно-издательского совета  
ФИЦ Институт прикладной физики РАН

Р е ц е н з е н т ы:

доктор физико-математических наук, профессор *A. Н. Морозов*,  
доктор физико-математических наук, профессор *B. M. Садовский*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных  
исследований (проекты 18-29-10073-мк и 19-08-00965-а)

**Ерофеев, Владимир Иванович.**

Е78 Структурное моделирование метаматериалов : [монография] /  
В. И. Ерофеев, И. С. Павлов ; Федер. исслед. центр Ин-т приклад. фи-  
зики РАН, Ин-т проблем машиностроения РАН. — Нижний Новгород :  
ИПФ РАН, 2019. — 196 с.

ISBN 978-5-8048-0098-8

В данной монографии развиваются теоретические основы метода структурного мо-  
делирования применительно к метаматериалам. Этот метод учитывает параметры кри-  
сталлической решетки, размеры частиц среды, их форму и константы силовых взаимо-  
действий между ними и поэтому является наиболее подходящим для изучения влияния  
размерных эффектов на физико-механические свойства материала. Построенные матема-  
тические модели метаматериалов позволяют не только получить представление о качест-  
венном влиянии локальной структуры на эффективные модули упругости соответст-  
вующей среды, но и проводить количественные оценки этих величин. Результаты иссле-  
дования могут найти применение при проектировании перспективных метаматериалов с  
заранее заданными физико-механическими свойствами.

Издание предназначено для специалистов, работающих в области механики дефор-  
мируемого твердого тела, физической акустики и физики конденсированного состояния,  
а также для студентов вузов и аспирантов, изучающих методы математического модели-  
рования.

УДК 539.3:534.22  
ББК 22.251в6

ISBN 978-5-8048-0098-8

© Ерофеев В. И., Павлов И. С., 2019  
© ИПФ РАН, 2019

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Предисловие .....</i>	3
<i>Введение.....</i>	5
<b>Глава 1. Теоретические основы метода структурного моделирования.....</b>	<b>9</b>
1.1. Обзор литературы.....	9
1.1.1. Дискретные модели сред без учета микровращений.....	9
1.1.2. Континаульные модели сред с вращательными степенями свободы частиц.....	12
1.1.3. Экспериментальные исследования динамических свойств сред с микроструктурой .....	15
1.2. Способы описания различных масштабных уровней .....	17
1.3. Границы применимости законов классической механики к моделированию обобщенных континуумов.....	22
1.3.1. Квантовое и классическое описание микрочастиц.....	22
1.3.2. Соотношение неопределенности .....	24
1.3.3. Микрочастица как локализованный волновой пакет .....	25
1.3.4. Принцип соответствия .....	27
1.4. Принципы структурного моделирования.....	29
1.5. Резюме .....	35
<b>Глава 2. Двумерная решетка с плотной упаковкой частиц .....</b>	<b>36</b>
2.1. Дискретная модель среды с гексагональной симметрией .....	36
2.2. Континаульное приближение.....	40
2.3. Влияние микроструктуры на акустические свойства среды .....	42
2.4. Дисперсионные свойства нормальных волн .....	44
2.4.1. Дисперсионные свойства дискретной модели .....	44
2.4.2. Дисперсионные свойства континуальной модели.....	49
2.5. Резюме .....	52
<b>Глава 3. Двумерная решетка с неплотной упаковкой частиц .....</b>	<b>54</b>
3.1. Дискретная модель анизотропной среды из эллипсовидных частиц .....	54
3.2. Континаульное приближение .....	58

3.2.1. Зависимость анизотропии среды от микроструктуры.....	59	5.4.3. Зависимость макропараметров среды от параметров ее микроструктуры .....	125
3.2.2. Квадратная решетка из круглых частиц.....	62	5.5. Резюме .....	128
3.2.3. Цепочка из частиц эллипсовидной формы.....	63	<b>Глава 6. Распространение и взаимодействие нелинейных волн в обобщенных континуумах .....</b>	130
<b>3.3. Влияние микроструктуры на акустические свойства среды .....</b>	<b>63</b>	6.1. Локализованные волны деформации в двумерной кристаллической среде с неплотной упаковкой частиц.....	130
3.3.1. Зависимость скоростей упругих и ротационных волн от формы частиц в случае одномерной решетки.....	64	6.2. Одномерная среда из эллипсовидных частиц с предварительными напряжениями.....	136
3.3.2. Зависимость акустических характеристик двумерной анизотропной среды от параметров микроструктуры.....	65	6.2.1. Механическая модель одномерной среды с предварительными напряжениями.....	136
<b>3.4. Дисперсионные свойства нормальных волн .....</b>	<b>67</b>	6.2.2. Уравнения градиентной теории упругости для одномерной среды с внутренними напряжениями .....	140
3.4.1. Дисперсионные свойства дискретной модели.....	67	<b>6.3. Самомодуляция сдвиговых волн деформации, распространяющихся в одномерной зернистой среде.....</b>	141
3.4.2. Дисперсионные свойства континуальной модели.....	75	6.3.1. Области модуляционной неустойчивости.....	142
<b>3.5. Резюме .....</b>	<b>77</b>	6.3.2. Вид волновых пакетов в случае модуляционной неустойчивости.....	144
<b>Глава 4. Применение двумерных моделей сред с плотной и неплотной упаковками частиц для решения задач параметрической идентификации .....</b>	<b>79</b>	<b>6.4. Нелинейные продольные волны в стержне из ауксетического материала .....</b>	147
4.1. Редуцированные (градиентные) модели теории упругости.....	79	6.4.1. Линейная математическая модель. Дисперсионные свойства .....	148
4.2. Задачи идентификации материалов .....	82	6.4.2. Нелинейная математическая модель. Стационарные волны деформации .....	150
4.2.1. Идентификация среды с гексагональной симметрией .....	83	6.4.3. Численное моделирование взаимодействия солитонов .....	157
4.2.2. Идентификация среды с кубической симметрией.....	87	<b>6.5. Резюме .....</b>	161
4.3. Сопоставление с континуальной теорией Коссера .....	92	<b>Заключение .....</b>	163
4.4. Влияние микроструктуры материала на коэффициент Пуассона изотропной среды.....	94	<b>Литература .....</b>	169
4.5. Влияние микроструктуры материала на коэффициенты Пуассона анизотропной среды .....	98	<b>Приложения .....</b>	190
4.6. Резюме .....	102		
<b>Глава 5. Нелинейные модели сред с микроструктурой.....</b>	<b>104</b>		
5.1. Прямоугольная решетка из эллипсовидных частиц.....	104		
5.2. Оценка коэффициентов нелинейностей математической модели квадратной решетки из круглых частиц.....	109		
5.3. Квадратная решетка из нанотрубок .....	114		
5.3.1. Дискретная модель .....	114		
5.3.2. Континуальное приближение .....	117		
5.3.3. Взаимосвязь между макромодулями материала и параметрами его внутренней структуры .....	118		
5.4. Однослочная среда из сферических частиц .....	120		
5.4.1. Дискретная модель .....	121		
5.4.2. Континуальное приближение .....	124		