

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФИЗИКИ

ТОМ II

**В.А. АБРАМОВСКИЙ
В.Н. БЕЛОВ
О.Н. НАЙДА**

**АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.
РЯДЫ И ИНТЕГРАЛЫ,
ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА.
РЯДЫ И ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ**



**МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2022**

УДК 512+514.7+517

ББК 22.161.1

А 16

Абрамовский В. А., Белов В. Н., Найда О. Н. **Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Ряды и интегралы, зависящие от параметра. Ряды и интегралы Фурье:** Учеб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2022. — 672 с. — (Математические основы физики: Т. II). — ISBN 978-5-9221-1941-2.

Учебник содержит материалы по аналитической геометрии, дифференциальному исчислению функции нескольких переменных, теории кривых, комплексных чисел, функциональных рядов и интегралов, зависящих от параметра, рядов и интегралов Фурье, матриц, определителей и систем линейных уравнений (в соответствии с университетской программой для физиков).

Для студентов бакалавриата и магистратуры, специализирующихся в области физики, прикладной математики, компьютерных наук и техники.

© ФИЗМАТЛИТ, 2022

© В. А. Абрамовский, В. Н. Белов,
О. Н. Найда, 2022

ISBN 978-5-9221-1941-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	13
Глава I. Координатные системы на плоскости и в пространстве	14
§ 1. Координатные системы на прямой и на плоскости	15
1.1. Координаты на прямой линии	15
1.2. Декартовы координаты на плоскости	16
1.3. Полярные координаты на плоскости	19
1.4. Преобразование декартовых координат на плоскости	20
§ 2. Координатные системы в пространстве	22
2.1. Декартовы координаты в пространстве	22
2.2. Преобразование декартовых координат в пространстве; сдвиги; углы Эйлера	26
2.3. Криволинейные координаты в пространстве (цилиндрические и сферические)	29
2.3.1. Цилиндрические координаты (29). 2.3.2. Сферические координаты (31).	
Глава II. Векторы и операции над ними	34
§ 3. Основные определения	34
3.1. Понятие вектора; равенство векторов	34
3.2. Сложение векторов	36
3.3. Вычитание векторов	39
3.4. Умножение вектора на число	40
§ 4. Проекция вектора	44
4.1. Определение	44
4.2. Свойства проекций	45
4.3. Проекция вектора на оси координат	48
4.4. Действия над векторами, заданными своими проекциями	50
§ 5. Скалярное произведение векторов	51
5.1. Определение	51
5.2. Основные свойства скалярного произведения	51

5.3. Скалярное произведение векторов, заданных проекциями	53
5.4. Направляющие косинусы вектора	54
§ 6. Векторное произведение	56
6.1. Определение	56
6.2. Основные свойства векторного произведения	57
6.2.1. Условие коллинеарности (57). 6.2.2. Антисимметричность (58). 6.2.3. Ассоциативность по числу (58). 6.2.4. Дистрибутивность (59).	
6.3. Векторное произведение векторов, заданных проекциями; определители	61
6.4. Двойное векторное произведение	65
§ 7. Смешанное произведение векторов	66
7.1. Определение и геометрическая интерпретация	66
7.2. Условие компланарности; дистрибутивность	68
7.3. Смешанное произведение в проекциях векторов	69
§ 8. Векторная функция	71
8.1. Векторная функция и её предел; непрерывность	71
8.2. Производная векторной функции	74
8.3. Производные скалярного и векторного произведений	76
Глава III. Линии и поверхности первого и второго порядков	78
§ 9. Уравнение линии на плоскости	78
9.1. Понятие уравнения линии	78
9.2. Уравнение прямой на плоскости	79
9.3. Примеры линий на плоскости	81
9.4. Функции нескольких переменных; общее определение линии	84
§ 10. Линии второго порядка (эллипс, гипербола, парабола)	87
10.1. Эллипс	87
10.1.1. Определение эллипса и его каноническое уравнение (87). 10.1.2. Эксцентриситет эллипса (91). 10.1.3. Уравнение эллипса в полярных координатах (91).	
10.2. Гипербола	93
10.2.1. Определение гиперболы и её каноническое уравнение (93). 10.2.2. Асимптоты гиперболы (97). 10.2.3. Эксцентриситет гиперболы (99). 10.2.4. Уравнение гиперболы в полярных координатах (100).	
10.3. Парабола	101

§ 11. Уравнение поверхности и уравнения линии в пространстве	104
11.1. Понятие уравнения поверхности.	104
11.2. Плоскость	106
11.3. Уравнения линии в пространстве	111
11.4. Прямая линия в пространстве	113
§ 12. Поверхности второго порядка (цилиндр, конус, эллипсоид, гиперboloиды, параболоиды)	114
12.1. Цилиндрическая поверхность.	114
12.2. Коническая поверхность.	117
12.3. Эллипсоид	119
12.4. Однополостный гиперboloид	120
12.5. Двуполостный гиперboloид	125
12.6. Эллиптический параболоид	126
12.7. Гиперболический параболоид	127
Глава IV. Евклидово m-мерное пространство и множества его точек; последовательности.	133
§ 13. Евклидово m -мерное пространство	133
13.1. Понятия евклидовой плоскости и евклидова пространства.	133
13.2. Множества точек евклидова m -мерного пространства	134
13.2.1. Определение m -мерного евклидова пространства E^m ; неравенство треугольника (134).	
13.2.2. Открытые и замкнутые множества точек (136). 13.2.3. Линия; прямая; ломаная (140).	
13.2.4. Связное множество (141).	
§ 14. Сходящаяся, ограниченная и бесконечно большая последовательности точек в m -мерном евклидовом пространстве E^m	142
14.1. Определение последовательности и её предела	142
14.2. Вспомогательная лемма	143
14.3. Критерий Коши сходимости последовательности.	145
14.4. Ограниченная последовательность точек в E^m	147
14.5. Бесконечно большая последовательность точек в E^m	150
Глава V. Пределы функции нескольких переменных в точке и на бесконечности; непрерывность	151
§ 15. Пределы функции в точке и на бесконечности	151
15.1. Определения конечного предела функции в точке (по Гейне и по Коши)	152
15.2. Эквивалентность определений конечных пределов в точке по Коши и по Гейне	156

15.3. Конечный предел функции при стремлении аргумента к бесконечности	160
15.4. Арифметические операции над функциями, имеющими конечный предел	161
15.5. Критерий Больцано–Коши существования предела функции	165
15.6. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.	171
15.7. Повторные пределы	174
§ 16. Непрерывные функции нескольких переменных.	175
16.1. Определение непрерывности функции нескольких переменных	175
16.2. Разностная форма условия непрерывности	177
16.3. Основные свойства непрерывных функций нескольких переменных	179
16.3.1. Арифметические операции над непрерывными функциями (179). 16.3.2. Непрерывность сложной функции (180). 16.3.3. Теорема об устойчивости знака непрерывной функции (182). 16.3.4. Теорема о прохождении непрерывной функцией любого промежуточного значения (182). 16.3.5. Ограниченность функции, непрерывной на замкнутом ограниченном множестве (184). 16.3.6. Достижение функцией, непрерывной на замкнутом ограниченном множестве, своих точных граней (185). 16.3.7. Равномерная непрерывность функции нескольких переменных (187).	
Глава VI. Производные функции нескольких переменных	191
§ 17. Частные производные.	191
17.1. Частные приращения функции нескольких переменных и частные производные.	191
17.2. Определение дифференцируемости функции нескольких переменных	193
17.3. Определение дифференциала функции нескольких переменных.	199
17.4. Дифференцирование сложной функции	200
17.5. Инвариантность формы первого дифференциала	203
17.6. Производная по направлению; градиент	204
17.7. Однородные функции; формула Эйлера.	206
§ 18. Частные производные высших порядков	208
18.1. Определение частных производные высших порядков	208
18.2. Теорема о смешанных производных	210

18.3. Пример. Оператор Лапласа в сферических координатах	212
18.4. Формула Тейлора	220
§ 19. Локальный экстремум функции m переменных	225
19.1. Понятие локального экстремума; необходимые условия локального экстремума	225
19.2. Достаточные условия локального экстремума (случай функции двух переменных)	227
Глава VII. Некоторые геометрические приложения дифференциального исчисления	232
§ 20. Линия и её касательные; спрямляемость и длина дуги	232
20.1. Аналитическое представление линии	232
20.2. Касательные; касание линий между собой	234
20.2.1. Касательная и нормаль к плоской линии (234).	
20.2.2. Касательная к пространственной линии (236).	
20.2.3. Касание плоских линий между собой; огибающая (238).	
20.3. Спрямляемость и длина дуги плоской кривой	241
20.4. Достаточные условия спрямляемости кривой; формулы для вычисления длины дуги кривой	243
§ 21. Кривизна и кручение кривой	248
21.1. Плоская кривая, её кривизна и эволюта	248
21.1.1. Кривизна плоской кривой (249). 21.1.2. Эволюта (250).	
21.2. Пространственная кривая, её кривизна и кручение	256
21.3. Формулы Френе	259
21.4. Винтовая линия как пример пространственной кривой	259
Глава VIII. Комплексные числа; алгебра многочленов	264
§ 22. Комплексные числа	264
22.1. Понятие комплексного числа	264
22.2. Сложение и вычитание комплексных чисел	266
22.3. Умножение и деление комплексных чисел	268
22.4. Извлечение корней	271
22.5. Комплексное сопряжение	272
§ 23. Алгебраические многочлены	273
23.1. Понятие алгебраического многочлена	273
23.2. Корни алгебраического многочлена	274
23.3. Разложение алгебраического многочлена с вещественными коэффициентами на неприводимые вещественные множители	278

Глава IX. Теория числовых рядов	281
§ 24. Понятие числового ряда; сходимость ряда	281
24.1. Ряд и его частичные суммы; сходящиеся и расходящиеся ряды	281
24.2. Критерий Коши сходимости ряда	285
§ 25. Ряды с неотрицательными членами	287
25.1. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда с неотрицательными членами	288
25.2. Признаки сравнения	290
25.3. Признаки Д'Аламбера и Коши	294
25.4. Интегральный признак Коши–Маклорена	299
§ 26. Абсолютно и условно сходящиеся ряды	303
26.1. Понятия абсолютно и условно сходящихся рядов	303
26.2. О перестановке членов условно сходящегося ряда	305
26.3. О перестановке членов абсолютно сходящегося ряда	310
§ 27. Арифметические операции над сходящимися рядами	313
27.1. Сложение рядов	313
27.2. Умножение рядов	313
§ 28. Признаки сходимости произвольных рядов	318
28.1. Признак Лейбница	318
28.2. Признаки Абеля и Дирихле	320
Глава X. Функциональные последовательности и ряды	331
§ 29. Равномерная сходимость	331
29.1. Понятия функциональной последовательности и функционального ряда	331
29.2. Сходимость функциональной последовательности в точке и на множестве	333
29.3. Равномерная сходимость функциональной последовательности	335
29.4. Равномерная сходимость ряда	340
29.5. Критерий Коши	343
29.6. Достаточные признаки равномерной сходимости функциональных рядов	346
§ 30. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов	351
30.1. Почленный переход к пределу; непрерывность	351
30.2. Почленное дифференцирование	358
30.3. Почленное интегрирование	364
§ 31. Степенные ряды	372
31.1. Понятие степенного ряда	372
31.2. Интервал сходимости степенного ряда	372

31.3. Равномерная сходимостъ степенного ряда и непрерывность его суммы	380
31.4. Дифференцирование и интегрирование степенного ряда	381
§ 32. Разложение в степенные ряды.	383
32.1. Основные теоремы о разложении функций в степенные ряды	384
32.2. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора.	387
Глава XI. Ряды Фурье.	391
§ 33. Периодические функции; понятие об ортогональных системах функций.	391
33.1. Периодические функции.	391
33.2. Интеграл от периодической функции	393
33.3. Арифметические действия над периодическими функциями	393
33.4. Последовательность гармоник с кратными частотами	394
33.5. Ортогональность тригонометрической системы; коэффициенты Фурье и ряд Фурье	395
33.6. Разложения чётных и нечётных функций в ряд Фурье	399
§ 34. Основная теорема о сходимости тригонометрического ряда Фурье	405
34.1. Класс кусочно-гладких функций	405
34.2. Основная лемма.	408
34.3. Преобразование выражения для частичной суммы тригонометрического ряда Фурье	410
34.4. Основная теорема о сходимости тригонометрического ряда Фурье	414
§ 35. Ряды Фурье по ортогональным системам функций; неравенство Бесселя	418
35.1. Ортогональные системы функций.	418
35.2. Коэффициенты Фурье и ряд Фурье функции $f(x)$ по ортогональной системе	423
35.3. Задача о наименьшем квадратичном уклонении; тождество Бесселя; неравенство Бесселя.	424
§ 36. Свойства ряда Фурье	428
36.1. Условие равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье.	429
36.2. Непрерывность ряда Фурье и его почленное интегрирование.	433

36.3. Связь между степенью гладкости функции и скоростью сходимости её ряда Фурье; почленное дифференцирование ряда Фурье	435
§ 37. Равномерная аппроксимация непрерывной функции тригонометрическими и алгебраическими многочленами; теоремы Вейерштрасса	441
§ 38. Сходимость в среднем.	446
38.1. Квадратичное уклонение и сходимость в среднем	446
38.2. Неравенство Коши–Буняковского	447
38.3. Интегрирование сходящихся в среднем последовательностей и рядов	449
§ 39. О полноте и замкнутости ортогональных систем	451
39.1. Понятие полноты ортогональной системы	452
39.2. Критерий полноты — равенство Парсеваля	453
39.3. Свойства полных систем	454
39.4. Полнота основной тригонометрической системы	458
§ 40. Ряды Фурье по ортогональным системам комплексных функций и комплексная запись тригонометрического ряда Фурье	462
40.1. Комплексные функции	462
40.2. Ряды Фурье по ортогональным системам комплексных функций	463
§ 41. Тригонометрические ряды Фурье для функций двух независимых переменных	467
41.1. Двойной ряд Фурье по основной тригонометрической системе	467
41.2. Двойной ряд Фурье по комплексной тригонометрической системе	470
Глава XII. Интегралы, зависящие от параметра	476
§ 42. Собственные и простейшие несобственные интегралы, зависящие от параметра	476
42.1. Собственные интегралы, зависящие от параметра	476
42.2. Простейшие несобственные интегралы, зависящие от параметра	484
§ 43. Общий случай несобственных интегралов, зависящих от параметра	495
43.1. Понятие равномерной сходимости	496
43.2. Сведение несобственного интеграла, зависящего от параметра, к последовательности функций	499
43.3. Условия равномерной сходимости несобственных интегралов первого рода	502

43.4. Свойства непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости несобственных интегралов первого рода, зависящих от параметра	511
43.5. Несобственные интегралы второго рода, зависящие от параметра	519
43.6. Применение теории интегралов, зависящих от параметра, к вычислению несобственных интегралов . . .	520
Глава XIII. Эйлеровы интегралы; формула Стирлинга . .	526
§ 44. Бета-функция Эйлера	526
44.1. Интеграл Эйлера первого рода, его особенности и область сходимости	526
44.2. Формулы приведения для функции $B(p, q)$	529
44.3. Непрерывность функции $B(p, q)$	530
§ 45. Гамма-функция Эйлера	531
45.1. Интеграл Эйлера второго рода, его особенности и область сходимости	531
45.2. Формулы приведения для функции $\Gamma(p)$	532
45.3. Непрерывность функции $\Gamma(p)$	533
45.4. Дифференцируемость функции $\Gamma(p)$	534
45.5. График функции $\Gamma(p)$	538
45.6. Связь с функцией $B(p, q)$	540
§ 46. Формула Стирлинга	543
46.1. Приближённый вариант формулы Стирлинга	543
46.2. Уточнённый вариант формулы Стирлинга	545
Глава XIV. Интеграл Фурье и преобразование Фурье . .	549
§ 47. Интегральная формула Фурье	549
47.1. Неограниченное растяжение интервала разложения функции в ряд Фурье и интегральная формула Фурье	549
47.2. Доказательство интегральной формулы Фурье	552
47.3. Интеграл Фурье как разложение в сумму гармоник	556
47.4. Комплексная форма интеграла Фурье	557
§ 48. Преобразование Фурье	558
48.1. Общее преобразование Фурье	558
48.2. Косинус-преобразование и синус-преобразование Фурье	559
§ 49. Случай функции двух независимых переменных . . .	563
Глава XV. Матрицы и определители	567
§ 50. Матрицы	567
50.1. Понятие матрицы	567
50.2. Основные операции над матрицами и их свойства . .	568
50.3. Блочные матрицы	574

§ 51. Определители	579
51.1. Понятие определителя; миноры	579
51.2. Разложение определителя по произвольной строке . .	582
51.3. Разложение определителя по произвольному столбцу	588
51.4. Выражение определителя через элементы его матрицы	594
51.5. Свойства определителей	599
51.6. Примеры вычисления определителей	604
51.7. Определитель произведения квадратных матриц	608
51.8. Понятие обратной матрицы	618
§ 52. Теорема о базисном миноре матрицы	623
52.1. Понятие линейной зависимости строк	623
52.2. Теорема о базисном миноре	624
52.3. Необходимое и достаточное условие равенства определителя нулю	633
Глава XVI. Системы линейных уравнений	635
§ 53. Условие совместности системы линейных уравнений	635
53.1. Понятия системы линейных уравнений и её совместности	635
53.2. Нетривиальная совместность однородной системы . .	638
53.3. Условия совместности общей линейной системы; теорема Кронекера–Капелли	640
§ 54. Отыскание решений линейной системы	642
54.1. Квадратная система линейных уравнений с ненулевым определителем основной матрицы; формулы Крамера	643
54.2. Решение эквивалентного матричного уравнения	648
54.3. Отыскание всех решений общей линейной системы	650
Заключение	655
Список литературы	657
Предметный указатель	659