

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

с примерами решения задач в СКМ Maple

Ю.Г. Игнатъев, А.А. Агафонов

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского



Казанский университет
2016

УДК 530.12+531.51+517.944+519.713+514.774
ББК 22.632
В87

Печатается по рекомендации Ученого совета
Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Игнатъев Ю.Г., Агафонов А.А. Математические модели теоретической физики с примерами решения задач в СКМ Maple. – Казань: Казанский университет, Изд-во АН РТ, 2016. – 264 с. – ISBN 978-5-9690-0318-7

профессор кафедры теоретической физики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, д.ф.-м.н. Гальцов Д.В.

Рецензенты:

профессор кафедры теоретической механики и мехатроники Национального исследовательского университета «Московский энергетический институт», д.ф.-м.н., Кирсанов М.Н.

В учебнике дано краткое изложение основ теоретической физики в форме лекций для студентов - математиков Института математики и механики Казанского федерального университета по курсам «Математические основы физики» и «Математические модели теоретической физики». В учебнике на основе принципа наименьшего действия и принципа общей ковариантности, Лагранжевого формализма и принципов симметрии изложены основы теоретической механики, включая релятивистскую, и классической теории поля, включая релятивистскую теорию гравитации и космологию. Лекции дополнены решением типовых задач, как аналитическими методами, так и методами программирования в прикладном математическом пакете Maple. В конце каждой лекции содержится список рекомендуемой литературы. Учебник предназначен для студентов физико-математических факультетов университетов, а также магистрантов и аспирантов, специализирующихся в области теоретической физики и математического моделирования. Ил. 95. Библиогр. 31. назв.

The textbook is a brief presentation of the foundations of theoretical physics in the form of lectures for students - Mathematics Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University courses «Mathematical Foundations of Physics» and «Mathematical Models of Theoretical Physics». In the textbook on the basis of principle of least action and the principle of general covariance, Lagrangian formalism and symmetry principles of the fundamentals of theoretical mechanics, including relativistic and classical field theory, including the relativistic theory of gravitation and cosmology. Lectures are supplemented to carry out tasks as analytical methods and programming methods in applied mathematics package Maple. At the end of each lecture, a list of recommended literature. The textbook is designed for students of physical and mathematical faculties of universities, as well as undergraduate and graduate students specializing in the field of theoretical physics and mathematical modeling.

ISBN 978-5-9690-0318-7

© Казанский университет, 2016
© Игнатъев Ю.Г., 2016
© Издательство Академии наук РТ, 2016

Оглавление

Об этой книге	8
Введение, 8 • Структура книги, 10	
1 Динамические системы и фазовое пространство	11
Понятие о динамической системе и динамических переменных, 11 • Понятие о динамической системе и степенях ее свободы, 11 • Фазовое пространство динамической системы, 13 • Принцип наименьшего действия (ПНД), 15 • Дополнительные свойства функции Лагранжа, 17 Литература к лекции, 18 Математическая модель движения тела в однородном поле тяжести при наличии трения, 18	
2 Элементы вариационного исчисления и вывод уравнений Эйлера-Лагранжа	25
Простая постановка вариационной задачи, 25 • Вариация и ее свойства, 26 • Вывод уравнения Эйлера, 29 Литература к лекции, 33 Задачи вариационного исчисления. 33	
3 Принцип наименьшего действия на примере геодезических	37
Геодезическая как кратчайшая, соединяющая две точки поверхности, 37 • Вывод уравнений геодезических, 38 • Интеграл уравнений геодезических, 39 • Примеры геодезических, 40 • Математические модели геометрической оптики, 43 Литература к лекции, 47 Построение геодезических линий на поверхности, 47 Компьютерное моделирование пучка световых лучей в неоднородной анизотропной оптической среде, 54 Компьютерное моделирование дисперсии световых лучей в неоднородной анизотропной оптической среде, 60	
4 Механические системы	65
Преобразование евклидова пространства, 65 • Группа преобразований евклидова пространства и группа преобразований Галилея, 65 • Классическая механика одной частицы, 66 Литература к лекции, 68 Задача, 68	

- 5 Теория одномерных колебаний** 73
 Одномерные колебания механической системы вблизи точки равновесия, 73 • Линейные одномерные колебания механической системы: вынужденные колебания, 76 • Линейные одномерные колебания механической системы: резонанс, 76 • Линейные одномерные колебания механической системы: диссипативные процессы, 77
 Литература к лекции, 79
 Моделирование линейных колебаний, 80
- 6 Математическая модель нелинейных колебаний** 90
 Нелинейные одномерные колебания механической системы вблизи точки равновесия, 90 • Механизм спонтанного нарушения симметрии, 91
 Литература к лекции, 92
 Численное моделирование спонтанного нарушения симметрии в СКМ Maple, 93
- 7 Движение в центрально-симметрическом поле** 99
 Постановка задачи о движении частицы в центрально - симметрическом поле, 99 • Принцип общей ковариантности и определение тензора, 99 • Ковариантное дифференцирование, 101 • Ковариантное обобщение уравнений движения, 101 • Уравнения движения в центрально - симметрическом поле, 102 • Решение уравнений движения в центрально - симметрическом поле, 103
 Литература к лекции, 107
 Компьютерное моделирование движения тела в центрально - симметрическом поле в СКМ Maple, 107
- 8 Основы релятивистской механики** 116
 Принципы специальной теории относительности, 116 • Двумерные преобразования Лоренца-Пуанкаре, 119 • Закон сложения скоростей и сокращение промежутков, 120 • Четырехмерный вектор скорости, 121 • Импульс-энергия и формула Эйнштейна, 122 • Дефект массы и распад частиц, 123
 Литература к лекции, 124
 Задача о «парадоксе близнецов», 124
- 9 Уравнения движения заряда в электромагнитном поле** 129
 Четырехмерный векторный потенциал электромагнитного поля, 129 • Действие для частицы в электромагнитном поле; уравнения движения заряда, 130 • Уравнения движения заряда и тензор электромагнитного поля, 131 • Уравнения движения заряда и "3+1"-разбиение, 131 • Тензор Максвелла и дискриминантный тензор, 132 • Инварианты

электромагнитного поля, 134 • "3+1" – разбиение уравнений движения, интеграл энергии, 136
 Литература к лекции, 137
 Алгебраические операции над тензорами в СКМ Maple, 137

- 10 Движение заряженных частиц: интегрирование уравнений Эйлера-Лагранжа** **141**
- Постоянные и однородные электромагнитные поля, 141 • Движение в постоянном однородном электрическом поле, 142 • Движение в постоянном однородном магнитном поле, 143 • Движение в постоянных однородных скрещенных полях, 144 • Движение в постоянных однородных скрещенных полях с учетом трения, 145
 Литература к лекции, 146
 Математическое и компьютерное моделирование движения электрического заряда в скрещенных электрическом и магнитном полях, 147
- 11 Четырехмерный вектор плотности тока и уравнения Максвелла** **153**
- Четырехмерный вектор плотности тока и уравнение непрерывности, 153 • Функция Дирака и ее свойства, 154 • Многомерная δ -функция и инвариантная функция источника, 156 • Четырехмерный вектор плотности тока и закон сохранения заряда, 157 • Уравнения Максвелла и монополю Дирака, 160 • Частные решения уравнений Максвелла: поле неподвижного точечного заряда, 161 • Частные решения уравнений Максвелла: поле движущегося точечного заряда – потенциалы Лиенара - Вихерта, 162
 Литература к лекции, 163
 Обобщенные функции в СКМ Maple, 164
- 12 Тензор энергии-импульса электромагнитного поля** **170**
- Общие принципы получения тензора энергии-импульса, 170 • Тензор энергии-импульса электромагнитного поля, 172 • Тензор энергии-импульса частиц, 173
 Литература к лекции, 175
 Компьютерное моделирование потенциальных полей в СКМ Maple, 175
- 13 Принципы релятивистской теории гравитации** **183**
- Принцип эквивалентности и геометрический характер гравитационного поля, 183 • Николай Иванович Лобачевский – Коперник геометрии, 186 • Ковариантное дифференцирование и тензор Римана, 188 • Свойства тензора Римана, 188 • Уравнения Эйнштейна, 189
 Литература к лекции, 189
 Тензорные вычисления в теории гравитации в СКМ Maple, 190

- 14 Линейное приближение общей теории относительности** 196
 Разложение тензора Римана по слабости гравитационного поля, 196 •
 Разложение тензора энергии - импульса, 198 • Уравнения линейной
 теории гравитации и их решения, 199 • Гравитационные волны, 200
 Литература к лекции, 202
 Моделирование малых возмущений сферически симметричного про-
 странства-времени в СКМ Maple, 202
- 15 Сферически - симметричные гравитационные поля** 208
 Связь теории гравитации с теорией групп Ли, 208 • Казанский гео-
 метр – физик теоретик Алексей Зиновьевич Петров, 209 • Сферическая
 симметрия, алгебраическая структура тензора Эйнштейна, 211 • Вы-
 числение метрических величин в случае сферической симметрии,
 212 • Уравнения Эйнштейна для случая сферической симметрии,
 212 • Решение Шварцшильда, 214
 Литература к лекции, 215
 Математическое и компьютерное моделирование движения массив-
 ной частицы в метрике Шварцшильда, 216
- 16 Теория Фридмана изотропной однородной Вселенной** 225
 Почему наша Вселенная однородная, изотропная и не всегда бы-
 ла такой, как сейчас?, 225 • Трёхмерные пространства постоянной
 кривизны и метрики Фридмана, 226 • Создатель теории расширя-
 ющейся Вселенной – Александр Александрович Фридман, 229 •
 Кинематика Вселенной Фридмана, 229 • Уравнения Эйнштейна и
 законы сохранения, 231 • Решения Фридмана, 232
 Литература к лекции, 234
 Тензорные вычисления для метрики Фридмана в СКМ Maple, 235
- 17 Горячая модель Вселенной Георгия Гамова** 240
 Основоположник теоретической астрофизики и горячей модели Все-
 ленной – Георгий Антонович Гамов, 240 • Локальное термодинами-
 ческое равновесие, 240 • Локальное термодинамическое равновесие:
 макроскопические скаляры, 241 • Законы сохранения и эволюция
 температуры: нерелятивистский газ, 243 • Законы сохранения и эво-
 люция температуры: ультрарелятивистский газ, 244 • Ферми и Бозе
 газы элементарных частиц, 244
 Литература к лекции, 247
- 18 Космологическая постоянная и ускорение Вселенной** 248
 Стандартная космологическая модель со скалярным вакуумом, 248 •
 Основные соотношения стандартной космологической модели, 249 •
 Качественный анализ динамической системы СКМ, 250 • Фазовые
 траектории динамической системы (18.25), 254
 Литература к лекции, 255

Качественная теория ОДУ в СКМ Maple, 257

Приложения 258

Физические константы и размерность физических единиц, 258 •

Список обозначений, 259 • Функции Бесселя мнимого аргумента, 260

Список литературы 261