

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**А. О. ВАТУЛЬЯН, С. А. НЕСТЕРОВ**

**КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ  
ТЕРМОМЕХАНИКИ**

*МОНОГРАФИЯ*

2-е издание, исправленное и дополненное

Ростов-на-Дону – Таганрог  
Издательство Южного федерального университета  
2022

УДК 539.3:536.24:519.85(075.8)

ББК 22.2+22.1 я73

В21

**Рецензенты:**

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой  
«Теоретическая и прикладная механика» ДГТУ *А. Н. Соловьёв*;  
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой  
математического моделирования Института математики, механики  
и компьютерных наук им. И.И. Воровича ЮФУ *А. В. Наседкин*

Ватульян, А. О.

В21 Коэффициентные обратные задачи термомеханики : монография : 2-е изд.  
исправ. и доп. / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров ; Южный федеральный уни-  
верситет. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерально-  
го университета, 2022. – 178 с.

ISBN 978-5-9275-4141-6

Рассмотрены различные постановки прямых и коэффициентных обратных задач теплопроводности, термоупругости и термоэлектроупругости. Разработаны численные и численно-аналитические методы исследования нестационарных связанных задач теплопроводности, термоупругости и термоэлектроупругости для элементов стержневых и цилиндрических конструкций, изготовленных из неоднородных, в том числе функционально-градиентных материалов. В рамках однопараметрической модели построены аналитические и численные решения статических задач градиентной термоупругости для составных тел (цилиндра и полосы). Проведен сравнительный анализ напряженно-деформированного состояния тел, рассчитанного в рамках классической и градиентной постановок, оценен вклад масштабных эффектов. Для решения нелинейных обратных задач термомеханики предложено два подхода: 1) итерационный, на каждом шаге которого решается прямая задача с текущими характеристиками и операторные уравнения Фредгольма 1-го рода с гладким ядром для нахождения поправок; 2) метод алгебраизации, в котором отыскиваются приближения в классе многочленов. Проведены вычислительные эксперименты по идентификации как гладких, так и разрывных характеристик неоднородных тел. Исследовано влияние зашумления входной информации.

Книга адресована научным и инженерно-техническим работникам, студентам старших курсов и аспирантам, специализирующимся в области математического моделирования, теплофизики, механики и прикладной математики.

Публикуется в авторской редакции.

*Издание осуществлено при поддержке гранта Правительства РФ № 075-15-2019-1928.*

УДК 539.3:536.24:519.85(075.8)

ББК 22.2+22.1 я73

ISBN 978-5-9275-4141-6

ISBN 978-5-9275-3187-5 © Ватульян А. О.,

Нестеров С. А., 2019

© Южный федеральный университет, 2022,

© Ватульян А. О., Нестеров С. А., 2022, с изменениями

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	7
<b>ГЛАВА 1. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ.....</b>	<b>8</b>
1.1 Динамические связанные задачи термоупругости для функционально-градиентных материалов .....	8
1.2 Моделирование предварительно-напряженного состояния в термоупругих телах.....	10
1.3 Моделирование термоупругого деформирования системы «покрытие-подложка».....	11
1.4 Моделирование напряженно-деформированного состояния микро-объектов на основе градиентной теории упругости .....	12
1.5 Термоэлектроупругость функционально-градиентных пироматериалов .....	13
<b>ГЛАВА 2. ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОМЕХАНИКИ. ПОЛУЧЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ.....</b>	<b>15</b>
2.1 Прямые и обратные задачи в целом. Структурная и параметрическая идентификация .....	15
2.2 Корректные и некорректные задачи. Основные причины некорректности .....	17
2.3 Методы решения конечномерных коэффициентных обратных задач термомеханики .....	18
2.4 Общая постановка задачи теплопроводности.....	21
2.5 Операторные уравнения для решения КОЗ теплопроводности.....	22
2.6 Общая постановка задачи термоупругости .....	23
2.7 Операторные уравнения для решения КОЗ термоупругости.....	25
2.7.1 Применение слабой постановки прямой задачи в трансформантах по Лапласу .....	25
2.7.2 Применение обобщенного соотношения взаимности в трансформантах по Лапласу .....	28

2.8	Общая постановка задачи термоэлектроупругости для преднапряженных функционально-градиентных пироматериалов .....	30
2.9	Операторные уравнения для решения КОЗ термоэлектроупругости .....	32
<b>ГЛАВА 3. ПОСТАНОВКИ И РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОМЕХАНИКИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ.....</b>		
<b>36</b>		
3.1	Решение задачи о распространении тепла в неоднородном стержне конечной длины .....	36
3.2	Решение задачи о распространении тепла в неоднородном бесконечно длинном полем цилиндре .....	39
3.3	Решение задачи о продольных колебаниях неоднородного предварительно напряженного термоупругого стержня .....	43
3.4	Решение задачи термоупругости для неоднородного слоя .....	49
3.5	Решение задачи о радиальных колебаниях неоднородно и предварительно напряженной термоупругой трубы .....	52
3.6	Исследование задачи термоупругости для конечного цилиндра.....	57
3.7	Построение упрощенных моделей термоупругого деформирования системы «покрытие-подложка» .....	64
3.7.1	Постановка задачи .....	64
3.7.2	Модель 1 для функционально-градиентного покрытия .....	67
3.7.3	Модель 2 для однородного покрытия .....	71
3.7.4	Численные результаты .....	73
3.8	Решение задачи о тепловом ударе по неоднородному термоэлектроупругому слою .....	76
3.9	Решение задачи теплопроводности для системы «покрытие-подложка» с интерфейсной трещиной .....	81
3.10	Решение задачи градиентной термоупругости для цилиндра с неоднородным покрытием .....	87
3.11	Масштабно-зависимая модель термоупругого деформирования составной полосы.....	94
<b>ГЛАВА 4. РЕШЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.....</b>		
<b>101</b>		
4.1	Итерационная схема решения одномерных КОЗ термомеханики .....	101
4.2	Решение обратной задачи теплопроводности для трубы .....	102
4.2.1	Постановка задачи .....	102
4.2.2	Операторные уравнения.....	102

4.2.3 Особенности применения метода Тихонова А.Н. при решении интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода .....	103
4.2.4 Численные результаты .....	105
4.3 Решение КОЗ теплопроводности для стержня .....	108
4.3.1 Постановка задачи.....	108
4.3.2 Вычислительная схема решения .....	109
4.3.3 Результаты вычислительных экспериментов .....	109
4.4 Решение обратной задачи теплопроводности для слоистых материалов .....	113
4.4.1 Постановка задачи .....	113
4.4.2 Решение обратной задачи методом алгебраизации .....	114
4.4.3 Результаты вычислительных экспериментов .....	118
<b>ГЛАВА 5. РЕШЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ .....</b>	<b>121</b>
5.1 Решение КОЗ термоупругости при исследовании колебаний неоднородного преднапряженного стержня .....	121
5.1.1 Постановка задачи .....	121
5.1.2 Операторные уравнения .....	122
5.1.3 Получение операторного уравнения в трансформантах с помощью метода линеаризации .....	124
5.1.4 Результаты идентификации.....	126
5.1.5 Влияние преднапряженного состояния на результаты идентификации .....	131
5.2 Решение КОЗ термоупругости для слоя .....	133
5.2.1 Постановка задачи.....	133
5.2.2 Результаты идентификации характеристик термоупругого слоя при наличии зон локальных экстремумов .....	134
5.2.3 Результаты идентификации термомеханических характеристик слоистой биологической ткани.....	135
5.2.4 Результаты идентификации термомеханических характеристик неоднородного покрытия .....	136
5.3 Решение КОЗ термоупругости при исследовании колебаний неоднородной преднапряженной трубы .....	139
5.3.1 Постановка задачи.....	139
5.3.2 Операторные уравнения .....	139

5.3.3 Результаты идентификации .....	140
5.3.4 Идентификация неоднородных преднапряжений в покрытии трубы .....	142
5.4 Идентификация двух термомеханических характеристик трубы.....	146
5.5 Решение КОЗ термоупругости для конечного цилиндра .....	150
<b>ГЛАВА 6. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОЭЛЕКТРОУП-</b> <b>РУГОСТИ ДЛЯ СТЕРЖНЯ.....</b>	<b>155</b>
6.1 Восстановление одной характеристики неоднородного термо- эластичного стержня .....	155
6.1.1 Постановка задачи .....	155
6.1.2 Формулировка операторных уравнений .....	158
6.1.3 Численные результаты.....	160
6.2 Восстановление двух характеристик неоднородного термо- эластичного стержня .....	162
6.2.1 Вычислительная схема .....	162
6.2.2 Результаты вычислительных экспериментов.....	163
<b>Список литературы.....</b>	<b>166</b>

*Научное издание*

**ВАТУЛЬЯН Александр Ованесович**

**НЕСТЕРОВ Сергей Анатольевич**

**Коэффициентные обратные задачи термомеханики**

*2-е издание, исправленное и дополненное*

Подписано в печать 12.05.2022 г.

Бумага офсетная. Формат 60×84 1/16. Тираж 300 экз.

Усл. печ. лист. 10,35. Уч.-изд. л. 9,5. Заказ № 8506.

Отпечатано в отделе полиграфической, корпоративной и сувенирной продукции  
Издательско-полиграфического комплекса КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ,  
344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, тел (863) 243-41-66.