

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

Н. Г. Павлова, А. О. Ремизов

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ОСОБЕННОСТЕЙ

Учебное пособие

МОСКВА
МФТИ
2021

УДК 517(075)
ББК 22.16я73
П12

Рецензенты:

Член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общих проблем управления МГУ им. М. В. Ломоносова

М. И. Зеликин

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории динамических систем МГУ им. М. В. Ломоносова *И. А. Богаевский*

**Павлова, Наталья Геннадьевна,
Ремизов, Алексей Олегович**

П12 Введение в теорию особенностей : учеб. пособие /
Н. Г. Павлова, А. О. Ремизов. – Москва : МФТИ, 2021. – 182 с.
ISBN 978-5-7417-0794-4

Излагаются основы теории особенностей (катастроф). Основное внимание уделено особенностям гладких функций и отображений. В заключительной части в качестве приложения рассматриваются дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной.

Предназначено для студентов физико-математических и технических специальностей физтех-школ МФТИ.

**УДК 517(075)
ББК 22.16я73**

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Московского физико-технического института (национального исследовательского университета)

ISBN 978-5-7417-0794-4

© Павлова Н. Г., Ремизов А. О., 2021
© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2021

Оглавление

Предисловие	6
1 Леммы Адамара и Морса	9
1.1 Лемма Адамара и ее следствия	9
1.2 Критические точки функций, лемма Морса	11
1.3 Устойчивость невырожденных критических точек	15
2 Теорема деления и ее следствия	18
2.1 Кратность функции по одной переменной	18
2.2 Теорема деления	19
2.3 Ряды Ньютона–Пуизе	20
3 Ростки, алгебры, струи	24
3.1 Ростки	24
3.2 Алгебраическое отступление	25
3.2.1 Алгебры, кольца, идеалы	25
3.2.2 Факторизация (общая идея)	28
3.2.3 Фактор-алгебры	30
3.3 Струи и плоские функции	34
3.3.1 Бескоординатное определение	34
3.3.2 Координатное определение	36
4 Критические точки функций: A_μ и D_μ	38
4.1 Коранг и коразмерность вырождения	38
4.2 Критические точки коранга 1	42
4.3 Критические точки коранга 2	43
5 Формальные ряды и гладкие функции	50
5.1 Формальные ряды	50
5.2 Гладкие функции	52
5.3 Три леммы о гладких функциях	56
6 Особенности плоских кривых	62
6.1 Нормальные формы ростков кривых	64
6.2 Примеры	68
6.2.1 Проектирование кривых	68
6.2.2 Точка на движущемся колесе	69

6.2.3	Дискриминантные кривые многочленов	70
6.2.4	Волновые фронты на плоскости	70
6.2.5	Эволюты и эвольвенты	72
6.2.6	Преобразование Лежандра	74
6.2.7	Дифференциальное уравнение Клеро	78
6.2.8	Контактные преобразования	80
7	Кратность ростков функций и отображений	84
7.1	Кратность ростков отображений	85
7.2	Кратность ростков функций	88
7.3	Теорема Мальгранжа	90
8	Лево-правая эквивалентность	94
8.1	Наводящие соображения	94
8.2	Лево-правая эквивалентность	95
8.3	Действие группы	98
8.4	Контактная эквивалентность	99
8.5	Философия общего положения	101
9	Особенности отображений $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$	105
9.1	Складка и сборка	106
9.2	Особенности коразмерности 3	114
10	Особенности отображений $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$	120
11	Особенности отображений $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$	125
11.1	Отображения общего типа	126
11.1.1	Коразмерность 2. Зонтик Уитни	127
11.1.2	Особенности коразмерности 3	127
11.2	Фронтальные отображения	129
11.2.1	Коразмерность 1. Ребро возврата	130
11.2.2	Коразмерность 2. Сложенный зонтик Уитни	132
11.2.3	Особенности коразмерности 3	133
11.2.4	Коразмерность 2. Ласточкин хвост	134
11.3	Примеры	136
11.3.1	Дискриминантные поверхности многочленов	136
11.3.2	Касательные поверхности к кривым	137
12	Доказательство теоремы деления	140
13	Неявные дифференциальные уравнения	145
13.1	Поднятие уравнения на поверхность	145

13.2	Особенности проектирования	151
13.2.1	Складка проектирования	153
13.2.2	Сборка проектирования	155
13.2.3	Особенности интегральных кривых	156
13.3	Феномен особого решения	157
13.4	Нормальные формы	164
14	Огибающие. Парадокс Каталана	169
	Литература	176
	Предметный указатель	179