

В. Ф. Формалев

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Допущено

Федеральным учебно-методическим объединением
в системе высшего образования

по укрупненной группе специальностей и направлений подготовки 24.00.00

«Авиационная и ракетно-космическая техника»

в качестве учебника для студентов, обучающихся по основным
образовательным программам высшего образования

по направлениям подготовки 24.03.01, 24.04.01

«Ракетная техника и космонавтика»



URSS

МОСКВА

Формалев Владимир Федорович

Численные методы: Учебник. — М.: ЛЕНАНД, 2023. — 408 с.

В учебнике представлены основные численные методы решения задач алгебры и анализа, теории приближений и оптимизации, задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики. Систематически изложены методы конечных разностей, конечных и граничных элементов, методы исследования аппроксимации, устойчивости, сходимости, оценок погрешности. Каждый метод иллюстрируется подробно разобранным примером, даны упражнения для самостоятельной проработки.

Для студентов и аспирантов технических университетов, специализирующихся в области теплотехники, прикладной механики и прикладной математики. Книга ориентирована на двухсеместровый курс обучения.

Рецензенты:

кафедра «Прикладная математика» МГТУ им. Н. Э. Баумана
(зав. кафедрой — лауреат премии Правительства РФ в области науки и техники,
д-р техн. наук, проф. *Г. Н. Кувыркин*);
заслуженный деятель науки РФ, д-р физ.-мат. наук, проф. *Э. М. Карташов*

*Рекомендовано к изданию кафедрой «Вычислительная математика
и программирование» Московского авиационного института
(национального исследовательского университета)*

*Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом института
«Информационные технологии и прикладная математика» Московского
авиационного института (национального исследовательского университета)
в качестве учебника*

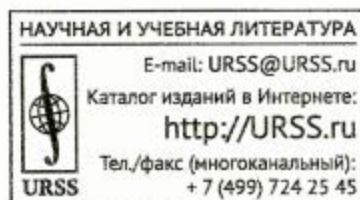
Формат 60×90/16. Печ. л. 25,5. Зак. № АС-7611.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».

117312, Москва, проспект 60-летия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978–5–9710–4992–0

© ЛЕНАНД, 2022



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

Оглавление

Предисловие	10
Введение	12
Часть 1. Численные методы алгебры и анализа	16
Глава 1. Элементы теории погрешностей	17
Глава 2. Численные методы алгебры	21
1. Численные методы решения СЛАУ	22
1.1. Метод Гаусса	22
1.2. Метод прогонки	30
1.3. Обоснование метода прогонки	36
1.4. Матричная прогонка	37
1.5. Нормы векторов и матриц	39
1.6. Итерационные методы решения СЛАУ. Метод простых итераций	42
1.7. Метод Зейделя решения СЛАУ	50
1.8. Метод Зейделя для нормальных СЛАУ	52
2. Численные методы решения нелинейных и трансцендентных уравнений	54
2.1. Способы отделения корней	55
2.2. Методы уточнения корней	57
2.3. Скорость сходимости. Процедура Эйткена ускорения сходимости	71
2.4. Замечания к методам отделения корней. О корнях функций Бесселя	73
3. Численные методы решения систем нелинейных уравнений	77
3.1. Метод простых итераций и метод Зейделя решения систем нелинейных уравнений	78
3.2. Метод Ньютона	81

4. Численные методы решения задач на собственные значения и собственные векторы матриц линейных преобразований	84
4.1. Основные определения и спектральные свойства матриц	84
4.2. Метод вращений Якоби численного решения задач на собственные значения и собственные векторы матриц	88
4.3. Частичная проблема собственных значений и собственных векторов матрицы. Степенной метод	97
Глава 3. Теория приближений	103
1. Исчисление конечных разностей	105
2. Задача интерполяции	106
2.1. Интерполяционный многочлен Лагранжа	107
2.2. Интерполяционный многочлен Ньютона	108
2.3. Погрешность многочленной интерполяции	109
2.4. Интерполяционный многочлен Ньютона, построенный с помощью разделенных разностей	112
2.5. Сплайн-интерполяция	114
3. Метод наименьших квадратов	125
4. Численное дифференцирование	133
4.1. Метод Рунге уточнения формул численного дифференцирования	136
5. Численное интегрирование функций	140
5.1. Формула прямоугольников	141
5.2. Формула трапеций	143
5.3. Формула Симпсона численного интегрирования	146
5.4. Процедура Рунге оценки погрешности и уточнения формул численного интегрирования	151
Глава 4. Численные методы решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений	156
1. Основные определения и постановка задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений	156

2. Метод Эйлера численного решения задач Коши для ОДУ и систем ОДУ	159
2.1. Метод Эйлера для нормальных систем ОДУ	161
3. Метод Эйлера—Коши (Эйлера с пересчетом)	162
3.1. Метод Эйлера—Коши для нормальных систем ОДУ	163
4. Метод Рунге—Кутта	164
4.1. Метод Рунге—Кутта для нормальных систем ОДУ	167
5. Выбор шага численного интегрирования задач Коши	168
6. Процедура Рунге оценки погрешности и уточнения численного решения задач Коши	169
7. Численные методы решения краевых задач для ОДУ	180
7.1. Постановка краевых задач для ОДУ	180
7.2. Конечно-разностный метод с использованием метода прогонки решения краевых задач для ОДУ	181
7.3. Конечно-разностная схема со вторым порядком аппроксимации краевых условий, содержащих производные	183
7.4. Метод пристрелки численного решения краевых задач для ОДУ	186
7.5. Метод пристрелки с использованием итерационной процедуры Ньютона	188
Глава 5. Численные методы оптимизации	199
1. Классификация численных методов оптимизации	199
2. Численные методы безусловной минимизации функций одной переменной. Прямые методы	200
2.1. Метод перебора	201
2.2. Метод деления отрезка пополам	203
2.3. Метод золотого сечения	205
3. Методы минимизации, использующие производные. Метод Ньютона	210

4. Безусловная минимизация функций многих переменных	212
4.1. Метод градиентного спуска	212
4.2. Метод наискорейшего спуска.....	218
4.3. Метод сопряженных направлений.....	221
Часть 2. Численные методы решения задач для уравнений математической физики	226
Глава 6. Метод конечных разностей	227
1. Постановка задач математической физики.....	227
1.1. Постановка задач для уравнений параболического типа	228
1.2. Постановка задач для уравнений гиперболического типа	230
1.3. Постановка задач для уравнений эллиптического типа	232
2. Основные определения и конечно-разностные схемы для различных задач математической физики.....	234
2.1. Основные определения.....	234
2.2. Конечно-разностная аппроксимация задач для уравнений гиперболического типа	237
2.3. Конечно-разностная аппроксимация задач для уравнений эллиптического типа	239
3. Основные понятия, связанные с конечно-разностной аппроксимацией дифференциальных задач	241
3.1. Аппроксимация и порядок аппроксимации.....	241
3.2. Устойчивость	243
3.3. Сходимость и порядок сходимости	243
3.4. Теорема эквивалентности о связи аппроксимации и устойчивости со сходимостью.....	244
3.5. Консервативность и корректность.....	244
4. Анализ порядка аппроксимации разностных схем.....	245

5. Исследование устойчивости конечно-разностных схем.....	247
5.1. Метод гармонического анализа	247
5.2. Исследование устойчивости методом гармонического анализа явной и неявной схем для уравнения теплопроводности.....	248
5.3. Исследование устойчивости методом гармонического анализа явной и неявной схем для волнового уравнения.....	250
5.4. Принцип максимума	252
5.5. Спектральный метод исследования устойчивости	253
5.6. Энергетический метод исследования устойчивости конечно-разностных схем	254
6. Конечно-разностный метод решения задач для уравнений параболического типа	260
6.1. Однородные и консервативные конечно-разностные схемы для задач теплопроводности с граничными условиями, содержащими производные	260
6.2. Неявно-явная конечно-разностная схема с весами. Схема Кранка—Николсон	266
6.3. Метод прямых.....	270
7. Метод конечных разностей решения задачи для волнового уравнения с граничными условиями, содержащими производные.....	274
8. Метод установления и его обоснование	277

Глава 7. Метод конечных разностей решения многомерных задач математической физики. Методы расщепления	282
1. Метод матричной прогонки	284
2. Метод переменных направлений Писмена—Рэчфорда	287
3. Метод дробных шагов Н. Н. Яненко	291
4. Метод переменных направлений с экстраполяцией В. Ф. Формалева	294
4.1. Аппроксимация	296

4.2. Устойчивость	300
5. Схема метода полного расщепления Формалева—Тюкина.....	301
6. Методы расщепления численного решения эллиптических задач	304
7. Методы решения задач для уравнений гиперболического типа	305
7.1. Метод характеристик решения квазилинейных гиперболических систем	305
7.2. Метод сквозного счета. Задача о распаде произвольного разрыва. Метод С. К. Годунова.....	310
Глава 8. Метод конечных элементов	318
1. Основы МКЭ.....	319
2. Система базисных функций	320
2.1. Кусочно-постоянные базисные функции	320
2.2. Линейные кусочно-непрерывные базисные функции.....	323
3. Методы взвешенных невязок. Весовые функции	324
3.1. Метод поточечной коллокации	325
3.2. Метод Галеркина.....	326
3.3. Метод наименьших квадратов	326
4. Конечно-элементный метод Галеркина решения красных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений	327
4.1. Слабая формулировка метода Галеркина	328
4.2. Формирование локальной и глобальной матриц жесткости. Ансамблирование элементов.....	330
4.3. Случай граничных условий, содержащих производные	334
5. Метод конечных элементов в стационарных задачах математической физики	336
5.1. Основные этапы решения стационарных задач математической физики методом конечных элементов.....	336

5.2. Принципы разбиения плоских областей на конечные элементы	338
5.3. Аппроксимация линейными многочленами и базисные функции	339
5.4. Слабая формулировка конечно-элементного метода Галеркина	342
5.5. Ансамблирование элементов и построение глобальной СЛАУ	348
6. Прямоугольные конечные элементы. Билинейные базисные функции	349
6.1. Прямоугольные элементы в МКЭ	349
6.2. Ансамблирование элементов	360
7. Метод конечных элементов в многомерных нестационарных задачах математической физики	364
8. Особенности решения пространственных задач математической физики методом конечных элементов	366
9. Оценка погрешности метода конечных элементов	368
9.1. Погрешность конечно-элементного метода решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений	368
9.2. Погрешность конечно-элементного метода решения задач для уравнений в частных производных	374
10. Вариационный принцип в МКЭ	377
10.1. Введение в вариационное исчисление	377
10.2. Конечно-элементный вариационный принцип на основе симметричного дифференциального оператора. Вариационный метод Релея—Ритца	380
10.3. Решение задач с помощью конечно-элементного вариационного принципа	384
Глава 9. Метод граничных элементов решения многомерных стационарных задач математической физики	388
Список литературы	398