

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

М.П. Галанин, В.В. Лукин, О.В. Щерица

Методы вычислений

Задачи алгебры и анализа

Учебное пособие



Москва

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н. Э. Баумана

2022

УДК 519.6
ББК 22.193
Г15

Издание доступно в электронном виде по адресу
<https://bmstu.press/catalog/item/7709/>

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Прикладная математика»

*Рекомендовано Научно-методическим советом
МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебного пособия*

Рецензент

д-р физ.-мат. наук А.В. Колдоба

Галанин, М. П.

Г15 Методы вычислений. Задачи алгебры и анализа : учебное пособие / М. П. Галанин, В. В. Лукин, О. В. Щерица. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2022. — 376 с. : ил.

ISBN 978-5-7038-5770-0

Изложены основные численные методы и алгоритмы решения базовых математических задач, ориентированных на применение современной вычислительной техники и позволяющих эффективно проводить количественный анализ математических моделей широкого класса реальных природных, социальных и технических объектов. Приведены методы решения задач линейной алгебры, систем нелинейных алгебраических уравнений, методы интерполяции функций, численного интегрирования и дифференцирования, численные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для студентов старших курсов технических университетов, аспирантов и инженеров. Может быть полезно также преподавателям и научным работникам.

УДК 519.6
ББК 22.193

Учебное издание

**Галанин Михаил Павлович, Лукин Владимир Владимирович,
Щерица Ольга Владимировна**

**Методы вычислений
Задачи алгебры и анализа**

Оригинал-макет подготовлен в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.
В оформлении использованы шрифты Студии Артемия Лебедева.

Подписано в печать 21.11.2022. Формат 60×90/16.

Усл. печ. л. 23,5. Тираж 157 экз. Изд. № 1007-2022 (4704).

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, г. Москва, улица 2-я Бауманская, д. 5, к. 1.
info@bmstu.press <https://bmstu.press>

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н.Э. Баумана.

105005, г. Москва, улица 2-я Бауманская, д. 5, к. 1. baumanprint@gmail.com

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2022

© Оформление. Издательство
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2022

ISBN 978-5-7038-5770-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Основные обозначения	7
Введение	11
1. Предварительные сведения	15
1.1. Погрешности при вычислениях	15
1.1.1. Причины появления погрешностей	15
1.1.2. Хранение чисел на ЭВМ и погрешности округления	17
1.1.3. Погрешности арифметических операций	24
1.1.4. Погрешность алгоритма	27
1.2. Элементы функционального анализа и линейной алгебры	31
1.2.1. Линейные пространства	31
1.2.2. Примеры нормированных линейных пространств	35
1.2.3. Операторы в нормированных пространствах	37
1.2.4. Операторы в гильбертовых пространствах	40
1.2.5. Операторы в конечномерных пространствах	43
1.2.6. Нормы векторов и матриц	45
1.2.7. Геометрическая интерпретация понятия линейного оператора	55
1.2.8. Признак Адамара и теоремы Гершгорина	56
Вопросы и задания	61
Библиографические комментарии	62
2. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений	63

2.1. Постановка задачи.....	63
2.2. Метод Гаусса	64
2.2.1. Схема метода Гаусса	64
2.2.2. Расчетные формулы и количество действий метода Гаусса	66
2.2.3. Связь метода Гаусса с разложением матрицы на множители	69
2.2.4. Выбор главного элемента.....	70
2.3. Обусловленность систем линейных алгебраических уравнений	74
2.4. Метод прогонки	82
2.4.1. Метод правой прогонки	82
2.4.2. Методы левой и встречных прогонок.....	86
2.4.3. Метод потоковой прогонки.....	87
2.4.4. Метод циклической прогонки	90
2.4.5. Метод пятидиагональной прогонки.....	94
2.4.6. Метод матричной прогонки.....	96
2.5. Метод квадратного корня.....	98
2.6. Решение линейных разностных уравнений	101
2.6.1. Линейные разностные уравнения.....	101
2.6.2. Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами	105
Вопросы и задания.....	115
Библиографические комментарии	116
3. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений	118
3.1. Классические одношаговые итерационные методы... ..	118
3.1.1. Каноническая форма одношаговых итерационных методов	118
3.1.2. Одношаговые итерационные методы.....	122

3.1.3. Геометрическая интерпретация одношаговых стационарных итерационных методов	129
3.1.4. Условия сходимости стационарных итерационных методов	133
3.2. Итерационные методы вариационного типа	138
3.2.1. Вариационный подход к построению итерационных методов	138
3.2.2. Расчетные формулы методов вариационного типа	140
3.2.3. Оценка скорости сходимости	141
3.2.4. Частные случаи методов вариационного типа ...	144
3.3. Методы сопряженных направлений	146
3.4. Предобуславливание	149
3.5. Итерационное уточнение решения	151
3.6. Решение проблемы собственных значений	153
3.7. Регуляризация плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений	155
3.8. Хранение больших разреженных матриц	157
Вопросы и задания	158
Библиографические комментарии	160
4. Методы интерполирования функций	162
4.1. Постановка задачи и простейшие методы интерполирования функций	162
4.1.1. Основные определения	162
4.1.2. Кусочно-линейная интерполяция	164
4.1.3. Многовариантность интерполирования	167
4.2. Полиномиальная интерполяция	172
4.2.1. Обоснование полиномиальной интерполяции ...	172
4.2.2. Интерполяционный полином в форме Лагранжа	174

4.2.3. Интерполяционный полином в форме Ньютона	178
4.2.4. Интерполяционный полином Эрмита	183
4.3. Сходимость и устойчивость полиномиальной интерполяции	190
4.3.1. Оптимизация узлов сетки	190
4.3.2. Устойчивость интерполяционного полинома относительно погрешностей функции	193
4.3.3. Устойчивость интерполяционного полинома относительно априорной информации	194
4.3.4. Наилучшие приближения в гильбертовом пространстве	200
4.3.5. Насыщаемость алгоритма интерполяции. Тригонометрическая интерполяция	204
4.4. Сплайн-интерполяция	206
4.5. Двумерная интерполяция	211
Вопросы и задания	216
Библиографические комментарии	217
5. Решение нелинейных уравнений	219
5.1. Решение скалярных уравнений	219
5.1.1. Постановка задачи и основные процедуры решения	219
5.1.2. Метод «вилки», или деления отрезка пополам ...	222
5.1.3. Итерационные методы типа простой итерации ...	223
5.1.4. Интерполяционные методы	230
5.2. Решение систем нелинейных уравнений	241
5.2.1. Постановка задачи и основные понятия	241
5.2.2. Сходимость стационарного метода	242
5.2.3. Примеры итерационных методов	245
Вопросы и задания	252
Библиографические комментарии	253

6. Методы численного интегрирования и дифференцирования	255
6.1. Простейшие квадратурные формулы.....	255
6.1.1. Постановка задачи и основные определения...	255
6.1.2. Формула прямоугольников.....	257
6.1.3. Формула трапеций.....	259
6.1.4. Формула Симпсона.....	260
6.2. Квадратурные формулы интерполяционного типа....	262
6.3. Квадратурные формулы Гаусса.....	267
6.4. Интегрирование быстроосциллирующих функций...	275
6.5. Вычисление несобственных интегралов I и II рода....	276
6.6. Вычисление кратных интегралов.....	281
6.7. Численное дифференцирование.....	283
Вопросы и задания.....	292
Библиографические комментарии.....	293
7. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений	295
7.1. Постановка задачи.....	295
7.2. Простейшие методы численного решения задачи Коши.....	297
7.2.1. Методы Эйлера.....	297
7.2.2. Симметричная схема.....	300
7.2.3. Метод Рунге — Кутты второго порядка.....	301
7.3. Методы Рунге — Кутты.....	302
7.3.1. Явные методы Рунге — Кутты.....	302
7.3.2. Доказательство сходимости методов Рунге — Кутты.....	308
7.3.3. Управление длиной шага.....	311
7.4. Многошаговые разностные методы.....	315
7.4.1. Определение линейных многошаговых методов.....	315

7.4.2. Погрешность аппроксимации многошаговых методов	318
7.4.3. Примеры методов Адамса и Гира	320
7.4.4. Устойчивость и сходимость разностных методов	324
7.5. Методы решения жестких систем	327
7.5.1. Условно устойчивые и безусловно устойчивые разностные методы	327
7.5.2. Понятие жесткой системы ОДУ	328
7.5.3. Решение жестких систем	329
Вопросы и задания	336
Библиографические комментарии	338
8. Решение краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений	339
8.1. Постановка задачи. Метод стрельбы	339
8.2. Конечно-разностные методы	345
8.2.1. Линейная краевая задача второго порядка ...	345
8.2.2. Нелинейные задачи	348
8.3. Методы Рунге и Галёркина	350
Вопросы и задания	354
Библиографические комментарии	355
Литература	356
Предметный указатель	363