

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

А. А. Хасанов

**ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ
ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО
ПЕРЕМЕННОГО**

Учебное пособие

МОСКВА
МФТИ
2022

УДК 517.53(075)
ББК 22.161.55я73
Х24

Рецензенты:

Кафедра математического и компьютерного моделирования МЭИ
Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики
и естественнонаучных дисциплин МГОТУ *К. Л. Самаров*

Хасанов, Адам Агзамович
Х24 Лекции по теории функций комплексного переменного : учеб.
пособ. / А. А. Хасанов ; М-во науки и высшего образования Рос.
Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (нац. исслед. ун-т). – Москва :
МФТИ, 2022. – 202 с.; ил.
ISBN 978-5-7417-0820-0

Излагаются основы теории функций комплексного переменного, включающие, наряду с общепринятыми в программах технических вузов разделами, теорию выделения регулярных ветвей многозначных функций, их представления и интегрирования. Рассмотрены отображающие свойства голоморфных функций и конформные отображения, задаваемые дробно-линейной, показательной, экспоненциальной функциями и функцией Жуковского.

Предназначено для студентов технических университетов с углубленным изучением математических дисциплин.

УДК 517.53(075)
ББК 22.161.55я73

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета Московского
физико-технического института (национального исследовательского университета)*

ISBN 978-5-7417-0820-0

© Хасанов А. А., 2022
© Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)», 2022

Оглавление

Предисловие.....	5
I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.....	7
§ 1. Определение и представления комплексных чисел. Основные операции с комплексными числами	7
§ 2. Последовательности и ряды в комплексной плоскости	14
2.1. Расширенная комплексная плоскость и сфера Римана	16
§ 3. Множества в расширенной комплексной плоскости	20
§ 4. Функция. Предел, непрерывность. Функциональные ряды	24
II. КОМПЛЕКСНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ	28
§ 5. Комплексная производная. Голоморфная функция	28
5.1. Гармонические функции и их связь с голоморфными функциями.....	34
§ 6. Элементарные функции комплексного переменного и их свойства	36
§ 7. Комплексное интегрирование.....	41
7.1. Кривые в комплексной плоскости.....	41
7.2. Комплексное интегрирование	47
7.3. Интеграл и первообразная	52
III. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА КОШИ.....	57
§ 8. Интегральная теорема Коши.....	57
8.1. Обобщения интегральной теоремы Коши	62
§ 9. Основные следствия из интегральной теоремы Коши	67
9.1. Интегральная формула Коши и интеграл Коши	67
9.2. Теорема Мореры	70
IV. РЯДЫ ТЕЙЛОРА.....	74
§ 10. Степенные ряды и их свойства	74
10.1. Теоремы Вейерштрасса	78
10.2. Теорема единственности	83
V. РЯДЫ ЛОРАНА И ОСОБЫЕ ТОЧКИ	86
§ 11. Ряд Лорана	86
§ 12. Изолированные особые точки.....	91
12.1. Целые функции	99
§ 13. Вычеты. Формулы для вычисления вычета	101
13.1. Приложение теории вычетов к вычислению интегралов ..	106
§ 14. Мероморфные функции.....	110

VI. МНОГОЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИИ	117
§ 15. Ветви многозначных функций	117
15.1. Выделение непрерывных ветвей многозначной функции $\text{Arg } z$	120
15.2. Выделение регулярных ветвей функции $\text{Ln } f$	126
15.3. Выделение регулярных ветвей функции $\{\sqrt[n]{f}\}$	130
15.4. Примеры разложения регулярных ветвей в степенные ряды	135
15.5. Примеры вычисления интегралов от регулярных ветвей многозначных функций с помощью вычетов	137
VII. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ И СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ, ЗАДАВАЕМЫХ ГОЛОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ	146
§ 16. Принцип аргумента	146
§ 17. Свойства отображений, задаваемых голоморфными функциями	150
§ 18. Конформные отображения	154
§ 19. Дробно-линейное отображение	160
19.1. Общий вид конформного отображения единичного круга на себя	168
19.2. О теореме Римана	169
§ 20. Функция Жуковского	170
20.1. Отображение, задаваемое обратной функцией Жуковского	173
§ 21. Степенная функция	175
§ 22. Экспоненциальная функция	177
§ 23. Принцип симметрии	179
§ 24. Решение классической задачи Дирихле	180
VIII. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ	187
§ 25. Аналитическое продолжение	187
25.1. Построение аналитического продолжения вдоль кривой ..	191
25.2. Понятие аналитической функции	196
25.3. Особые точки аналитической функции	198
Список литературы	201