

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

В. А. Садовничий

ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ

Учебник

7-е издание, исправленное

Издательство Московского университета | 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	11
Глава 1. Метрические и топологические пространства	13
§ 1.1. Простейшие понятия теории множеств	13
§ 1.1.1. Основные свойства множеств. Отображения. Прямое произведение множеств	13
§ 1.1.2. Мощность множества	18
§ 1.1.3. Частичная упорядоченность. Упорядоченность	21
§ 1.1.4. Сравнения мощностей	22
§ 1.2. Метрические пространства	24
§ 1.2.1. Определение метрического пространства. Примеры	24
§ 1.2.2. Открытые и замкнутые множества	28
§ 1.2.3. Всюду плотные и совершенные множества	31
§ 1.2.4. Сходимость. Непрерывные отображения	33
§ 1.2.5. Компактность	35
§ 1.2.6. База топологии пространства	37
<i>Задачи</i>	40
§ 1.3. Свойства метрических пространств	41
§ 1.3.1. Пополнение метрических пространств	43
§ 1.3.2. Основные теоремы в полных метрических пространствах	45
§ 1.3.3. Компактность в метрических пространствах, ϵ -сеть .	51
<i>Задачи</i>	53
§ 1.4. Топологические пространства	54
§ 1.4.1. Определение топологического пространства. Хаусдорфово топологическое пространство. Примеры	55
§ 1.4.2. Замечание о топологических пространствах	58
<i>Задачи</i>	60
§ 1.5. Свойства топологических пространств	61
§ 1.5.1. Регулярные, вполне регулярные и нормальные пространства	62
§ 1.5.2. Регулярные пространства со счётной базой. Теорема Тихонова	64
§ 1.5.3. Компактные хаусдорфовы и нормальные пространства	65
§ 1.5.4. Метрические и топологические пространства	65
§ 1.5.5. Тихоновские произведения топологических пространств	66
§ 1.5.6. Теорема Стоуна — Вейерштрасса	68
<i>Задачи</i>	70

ГЛАВА 2. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА	71
§ 2.1. Линейные топологические пространства	71
§ 2.1.1. Группа, кольцо, поле, линейное пространство	71
§ 2.1.2. Линейные операторы. Пространство операторов	77
§ 2.1.3. Банаховы пространства	77
§ 2.1.4. Выпуклые множества, функционал Минковского, полуноормы	79
§ 2.1.5. Линейные топологические пространства. Теорема А. Н. Колмогорова	84
§ 2.1.6. Счётно-нормированные пространства	89
Задачи	91
§ 2.2. Линейные ограниченные операторы в банаховых и F -пространствах. Основные принципы функционального анализа	93
§ 2.2.1. Линейные ограниченные операторы в банаховых пространствах. Банахово пространство операторов. Понятие F -пространства	93
§ 2.2.2. Принцип равномерной ограниченности	97
§ 2.2.3. Теорема об обратном операторе. Принцип открытости отображения	102
§ 2.2.4. Продолжение операторов и функционалов. Принцип продолжения Банаха — Хана	106
§ 2.2.5. Различные топологии, различные типы сходимостей. Общие виды функционалов в конкретных пространствах	112
§ 2.2.6. Компактные множества, слабая компактность	122
Задачи	126
ГЛАВА 3. ТЕОРИЯ МЕРЫ. ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ И ИНТЕГРАЛ	127
§ 3.1. Теория меры	127
§ 3.2. Измеримые функции	140
§ 3.3. Интеграл Лебега	144
§ 3.3.1. Определение интеграла Лебега	146
§ 3.3.2. Свойства интеграла Лебега	147
§ 3.3.3. Предельный переход под знаком интеграла Лебега	153
§ 3.3.4. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана	156
§ 3.3.5. Пространство L^p	158
§ 3.4. Абсолютно непрерывные функции множеств. Теорема Радона — Никодима	161
§ 3.4.1. Абсолютно непрерывные функции множеств	161
§ 3.4.2. Теорема Радона — Никодима	163
§ 3.5. Прямое произведение мер. Теорема Фубини	166
§ 3.5.1. Прямое произведение мер	166
§ 3.5.2. Теорема Фубини	170
Задачи	171

ГЛАВА 4. ГЕОМЕТРИЯ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ	174
§ 4.1. Гильбертовы пространства	174
§ 4.1.1. Геометрия гильбертова пространства	174
§ 4.1.2. Базисы гильбертова пространства	179
§ 4.1.3. Размерность гильбертова пространства	183
§ 4.1.4. Ортогональные разложения в гильбертовом пространстве	184
§ 4.1.5. Биортогональные последовательности	185
§ 4.1.6. Матричное представление линейного ограниченного оператора в H	193
§ 4.1.7. Примеры	193
Задачи	197
§ 4.2. Спектральные теоремы	199
§ 4.2.1. Сопряжённый оператор	200
§ 4.2.2. Понятие о вполне непрерывном операторе	201
§ 4.2.3. Абсолютная норма оператора	203
§ 4.2.4. Альтернатива Фредгольма	206
§ 4.2.5. Проектирующие операторы	210
§ 4.2.6. Спектр оператора	214
§ 4.2.7. Симметрические операторы. Свойства квадратичной формы оператора	216
§ 4.2.8. Квадратный корень из симметрического оператора	219
§ 4.2.9. Спектральная теорема для симметрического оператора в n -мерном пространстве	220
§ 4.2.10. Вполне непрерывные операторы. Спектральная теорема	223
§ 4.2.11. Спектральная теорема для симметрического ограниченного оператора	225
§ 4.2.12. Спектральная теорема для унитарного оператора	230
§ 4.2.13. Неограниченные операторы	237
§ 4.2.14. Спектр симметрического ограниченного оператора	250
§ 4.2.15. Спектр и резольвента неограниченных операторов	254
Задачи	258
§ 4.3. Операторные уравнения. Аналитические функции и операторы	260
§ 4.3.1. Аналитические свойства резольвенты	260
§ 4.3.2. Теорема Келдыша	269
§ 4.3.3. Корневые векторы и корневые подпространства несамосопряжённых операторов	272
§ 4.3.4. Дифференциальные операторы	280

ГЛАВА 5. СЛЕДЫ ОПЕРАТОРОВ **286**

§ 5.1. Теорема о следе для оператора в n -мерном пространстве	286
---	-----

§ 5.2. Ядерные операторы. Теорема о следе	287
§ 5.2.1. Теорема о следе для положительного ядерного оператора	287
§ 5.2.2. Свойства s -чисел вполне непрерывных операторов	291
§ 5.2.3. Оценки собственных значений вполне непрерывного оператора	298
§ 5.2.4. Оценки s -чисел произведений и сумм линейных вполне непрерывных операторов	304
§ 5.2.5. Теорема о следе для ядерного оператора	306
§ 5.3. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций. Следы дифференциальных операторов	313
§ 5.3.1. Функции класса K	313
§ 5.3.2. Дзета-функция	315
§ 5.3.3. Регуляризованные суммы корней функции класса K	318
<i>Задачи</i>	322
§ 5.4. Следы дискретных операторов	323
ГЛАВА 6. ОБОБЩЁННЫЕ ФУНКЦИИ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ	348
§ 6.1. Обобщённые функции	348
§ 6.1.1. Понятие обобщённой функции	348
§ 6.1.2. Основные свойства обобщённых функций	353
§ 6.1.3. Дифференциальные уравнения с обобщёнными функциями	358
§ 6.1.4. Прямое произведение и свёртка обобщённых функций	361
§ 6.2. Преобразование Фурье	363
§ 6.2.1. Преобразование Фурье функций из пространства L^1	363
§ 6.2.2. Преобразование Фурье функций из пространства L^2	366
§ 6.2.3. Преобразование Фурье обобщённых функций	368
ЛИТЕРАТУРА	371
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	373