

УДК 536.46

## МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ГОРЕНИЯ В ТВЕРДОТОПЛИВНОМ РАКЕТНОМ ДВИГАТЕЛЕ

© 2009 г. Б. В. Новожилов, З. И. Каганова, А. А. Беляев

*Институт химической физики им. Н.Н. Семенова Российской академии наук, Москва*

*E-mail: novozhilov@starnet.ru*

Поступила в редакцию 26.11.2007

В рамках феноменологической теории нестационарного горения исследованы возможные режимы горения в твердотопливном ракетном двигателе с торцевым расположением заряда. Сформулирована система уравнений, позволяющая моделировать взаимодействие горения и акустики в камере сгорания. Особенностью задачи является наличие двух характерных времен – акустического и времени изменения амплитуды колебаний давления. Эти времена отличаются примерно на три порядка, что требует высокой точности численного расчета. В квадратичном приближении по амплитуде колебаний предложен более простой метод решения задачи, в котором учитываются только эффекты, связанные с характерным временем изменения амплитуды колебаний. Численные результаты получены для простейшей модели пороха, содержащей минимальное число параметров, и при отсутствии энтропийных волн в продуктах сгорания. Найдены режимы, соответствующие устойчивому и неустойчивому горению, в последнем случае нелинейные эффекты могут привести к образованию ударных волн в камере сгорания.

### ВВЕДЕНИЕ

С самого начала конструирования твердотопливных ракетных двигателей оказалось, что на фоне расчетного стационарного режима их работы возникают различного рода нестационарные эффекты, например мягкое или жесткое возбуждение колебаний скорости горения и давления. Широкое применение двигателей на твердом топливе свидетельствует о том, что, по-видимому, у конструкторов есть достаточно эффективные эмпирические методы борьбы с этими чаще всего нежелательными явлениями, которые обычно возникают уже на стадии проектирования. Несколько статей в сборнике [1] посвящены именно этому аспекту проблемы неустойчивости работы твердотопливного двигателя. Там же указывается, что успехи в понимании проблемы и теоретическом объяснении различных нестационарных явлений, наблюдаемых в лабораторных исследованиях и при практическом применении твердых ракетных топлив, весьма скромны.

Попытки построить последовательную теорию нестационарных процессов в камере сгорания твердотопливного ракетного двигателя продолжают уже в течение пятидесяти лет. Большинство публикаций, обзор которых можно найти в [2], принадлежит исследователям из США. Все эти попытки оказались безуспешными, поскольку для описания взаимодействия акустики и горения американские авторы используют очень упрощенный подход.

Во-первых, рассматривается только линейный отклик скорости горения пороха на меняющееся давление. Очевидно, что линейный анализ проблемы взаимодействия процесса горения пороха с акустическим полем может быть использован (в совокупности с приближением линейной акустики) для выяснения условий устойчивости стационарного режима горения в камере сгорания. Однако для исследования процессов с конечной амплитудой давления необходимо выйти из рамок линейного приближения.

Во-вторых, при исследовании двигателей с канальным зарядом пренебрегается влиянием тангенциального потока на скорость горения топлива (эрозионный эффект).

Указанные обстоятельства и ряд плохо обоснованных предположений, принятых при решении проблемы, привели исследователей из США к выводу [3], что полученные в ходе многолетних исследований результаты не могут считаться решением проблемы нестационарного горения в твердотопливном двигателе с канальным зарядом. Отметим в этой связи, что в наших недавних работах [4, 5] показано, что эрозионный эффект играет решающую роль в теории нестационарных явлений в двигателе на твердом топливе.

Все сказанное выше позволяет утверждать, что в настоящее время отсутствует решение проблемы нестационарных явлений в двигателе с канальным зарядом. Фактически нет даже и сколько-нибудь разумной постановки задачи.

Цель настоящей работы – исследовать обсуждаемую проблему для твердотопливного двигателя с торцевым зарядом. При этом задача становится пространственно одномерной, эрозионный эффект отсутствует, а нелинейный отклик скорости горения на изменяющееся давление может быть найден в рамках теории Зельдовича–Новожилова [6–8].

Математическая постановка задачи, приведенная в следующем разделе работы, включает нелинейные уравнения акустики и нестационарные законы горения для конкретной модели пороха, которая характеризуется минимальным количеством параметров. В задаче присутствуют два характерных времени – “быстрое” акустическое и “медленное” время изменения амплитуды колебаний. Они отличаются примерно на три порядка, что выдвигает высокие требования к точности численного расчета.

В третьем разделе настоящей работы предложен более простой метод решения задачи. В квадратичном приближении по амплитуде колебаний давления получена система обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд различных мод колебаний. В этой системе отсутствуют эффекты, связанные с быстрым акустическим временем, что позволяет существенно сократить время численных расчетов.

В последнем разделе приведены примеры нестационарных режимов горения. Найден режимы, соответствующие устойчивому и неустойчивому горению, в последнем случае нелинейные эффекты могут привести к образованию ударных волн в камере сгорания. Здесь же проведено сравнение результатов, полученных решением полной задачи и приближенным методом.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается твердотопливный ракетный двигатель с торцевым расположением заряда. Задача пространственно одномерна, причем координата  $x = 0$  соответствует поверхности горения топлива, а  $x = L$  – координате положения сопла. Уточним, что в понятие поверхности горения включается и тонкая зона, в которой протекают химические превращения в конденсированной фазе и газофазные реакции. Иными словами, координата  $x = 0$  соответствует области, лежащей между началом реакций в конденсированной фазе и образованием конечных продуктов горения при  $0 \leq t \leq \infty$ .

В газовой фазе при  $0 \leq x \leq L$  система, описывающая нестационарные акустические явления, вклю-

чает уравнение непрерывности, уравнение Эйлера и условие адиабатичности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho g}{\partial x} &= 0, \quad \rho \left( \frac{\partial g}{\partial t} + g \frac{\partial g}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho &= \frac{\gamma p^0}{a^2} \left( \frac{p}{p^0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad a^2 = \frac{\gamma p^0}{\rho^0}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\rho$ ,  $p$  и  $g$  – плотность, давление и скорость движения газа соответственно,  $\gamma$  – постоянная адиабаты и  $a$  – скорость звука. Верхний нулевой индекс означает стационарное значение величины. Здесь принято, что температура продуктов сгорания  $T_b$  сразу же после окончания газофазных реакций подчиняется условию адиабатичности:

$$x = 0, \quad \frac{T_b}{T_b^0} = \left( \frac{p}{p^0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

Такое приближение исключает появление энтропийных волн, что существенно упрощает анализ проблемы – не нужно рассматривать уравнение теплопроводности в газовой фазе. Это предположение не вносит большой ошибки. Как показано в [8], относительная ошибка имеет тот же порядок, что и отношение перепада температур в конденсированной фазе к полному изменению температуры в волне горения.

Процесс горения рассматривается в рамках феноменологической теории нестационарного горения [6–8]. Она предполагает решение уравнения теплопроводности в конденсированной фазе ( $-\infty < x \leq 0$ )

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - u \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2)$$

где  $u$  – линейная скорость горения (скорость движения конденсированной фазы в выбранной системе координат, при этом система связана с границей раздела фаз), а  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности конденсированной фазы.

Необходимым элементом теории являются стационарные зависимости скорости горения и температуры поверхности от давления  $p$  и начальной температуры  $T_a$ .

Ниже исследуется конкретная модель твердого топлива. Она выбрана так, чтобы задача содержала минимальное число параметров. Простейшая модель, удовлетворяющая этому условию, определяется следующими стационарными зависимостями:

$$u^0 = A(p^0)^{\nu} \exp(\beta T_a), \quad u^0 = B \exp(\beta_s T_s^0), \quad (3)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $\nu$ ,  $\beta$  и  $\beta_s$  – константы.

В нестационарной теории горения конденсированных энергетических систем стационарные зако-

ны горения (3) должны быть переведены в нестационарные. Для этого, прежде всего, из михельсоновского выражения для стационарного распределения температур в конденсированной фазе

$$T^0(x) = T_a + (T_s^0 - T_a) \exp(u^0 x / \kappa),$$

где  $T_s^0$  – температура раздела фаз, найдем связь начальной температуры и градиента температуры непосредственно у границы раздела фаз

$$T_a = T_s^0 - \frac{\kappa f^0}{u^0}, \quad f^0 = \left. \frac{\partial T^0}{\partial x} \right|_{x=0}.$$

Замена в (3) начальной температуры на ее выражение через градиент и исключение индекса стационарного режима приводит к искомым нестационарным законам горения:

$$u = A p^v \exp\left[\beta\left(T_s - \frac{\kappa f}{u}\right)\right], \quad u = B \exp(\beta_s T_s). \quad (4)$$

Перейдем к формулировке граничных условий. В исходном состоянии топливо имеет начальную температуру, поэтому

$$x \rightarrow -\infty, \quad T = T_a. \quad (5)$$

На поверхности раздела фаз температура конденсированной фазы равна по определению температуре поверхности, а поток массы непрерывен:

$$x = 0, \quad T = T_s(t); \quad x = 0, \quad \rho_c u = \rho g, \quad (6)$$

где  $\rho_c$  – плотность конденсированной фазы.

Наконец, граничное уравнение при входе газа в сопло имеет вид [9]

$$x = L, \quad u = \Gamma \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, \quad \Gamma = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \frac{S_{\min}}{S}, \quad (7)$$

где  $S_{\min}$  и  $S$  – площади сечения сопла и камеры сгорания.

Для дальнейшего анализа переведем постановку задачи в безразмерную форму. При этом удобно рассматривать величины, которые представляют собою добавки к стационарным значениям величин.

Обезразмеривание пространственных координат производится при помощи характерных величин:  $\kappa/u^0$  – для конденсированной фазы и  $L$  – для газовой. Время обезразмеривается на характерное время газовой фазы  $L/a$ :

$$-\infty < x \leq 0, \quad \xi = \frac{u^0}{\kappa} x, \quad -\infty < \xi \leq 0;$$

$$0 \leq x \leq L, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad 0 \leq \xi \leq 1;$$

$$\tau = \frac{a}{L} t.$$

Ниже используются следующие безразмерные функции, их аргументы и определяющие задачу параметры:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{T - T^0}{T^0 - T_a}, \quad \vartheta = \frac{T_s - T_s^0}{T_s^0 - T_a}, \quad \phi = \frac{f}{f^0} - 1, \\ v &= \frac{u}{u^0} - 1, \quad \zeta = \gamma \frac{g - g^0}{a}, \quad \eta = \frac{p}{p^0} - 1, \quad (8) \\ M &= \frac{g^0}{a}, \quad \chi = \frac{(u^0)^2 L}{\kappa a}. \end{aligned}$$

Здесь  $M$  – число Маха для продуктов горения, а  $\chi$  – аппаратная константа, т.е. отношение характерного акустического времени  $L/a$  к характерному времени конденсированной фазы  $\kappa/(u^0)^2$ .

В этих переменных уравнения (1) и (2) при  $\tau \geq 0$  принимают вид

$$\begin{aligned} -\infty < \xi \leq 0, \\ \frac{1}{\chi} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - (1 + v) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - v \exp(\xi), \\ 0 &\leq \xi \leq 1, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\gamma \frac{\partial}{\partial \tau} (1 + \eta)^{\frac{1}{\gamma}} + \frac{\partial}{\partial \xi} (1 + \eta)^{\frac{1}{\gamma}} (\zeta + \gamma M) = 0,$$

$$(1 + \eta)^{\frac{1}{\gamma}} \left[ \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} + \left( \frac{\zeta}{\gamma} + M \right) \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right] = - \frac{\partial \eta}{\partial \xi}.$$

Нестационарные законы горения (4) записываются как

$$v = (1 + p)^v \exp\left(k \frac{\vartheta + v - \phi + \vartheta v}{1 + v}\right) - 1, \quad (10)$$

$$v = \exp\left(\frac{k}{r} \vartheta\right) - 1,$$

где

$$k = \beta(T_s^0 - T_a), \quad r = \beta/\beta_s.$$

Наконец, для граничных условий (5)–(7) имеем

$$\xi \rightarrow -\infty, \quad \theta = 0;$$

$$\xi = 0, \quad \theta = \vartheta,$$

$$(1 + \eta)^{\frac{1}{\gamma}} (\zeta + \gamma M) = \gamma M (1 + v); \quad (11)$$

$$\xi = 1, \quad \zeta = \gamma M \left[ (1 + \eta)^{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} - 1 \right].$$

Система (9)–(11) включает в себя неизвестные функции  $v(\tau)$ ,  $\vartheta(\tau)$ ,  $\phi(\tau)$ ,  $\theta(\xi, \tau)$ ,  $\eta(\xi, \tau)$ ,  $g(\xi, \tau)$  и параметры  $v$ ,  $k$ ,  $r$ ,  $\gamma$ ,  $M$ ,  $\chi$ .

В стационарном режиме все перечисленные выше функции равны нулю.

### ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД

Решение задачи (9)–(11) от некоторых начальных условий представляет собою колебания давления и других величин с периодом порядка акустического времени. Амплитуда же колебаний изменяется гораздо медленнее, а именно оценивается как характерное время изменения порядка акустического времени, деленное на число Маха. (Для рассматриваемых систем число Маха равно  $\sim 10^{-3}$ .) Наличие двух так сильно различающихся масштабов времени приводит к значительным трудностям при численном исследовании задачи.

Цель настоящего раздела состоит в приближенном решении задачи, основанном на рассмотрении только медленного изменения амплитуды колебаний.

В акустическом приближении (отсутствие ударных волн) амплитуды колебаний скорости газа и давления малы. Поэтому рассматривается низшее нелинейное приближение, а именно квадратичное по амплитуде колебаний давления газа.

Учет движения среды приводит к поправкам в комплексной частоте колебаний порядка квадрата числа Маха. Этими поправками пренебрегаем и в уравнениях гидродинамики опускаем члены, связанные с движением среды.

Обратимся прежде всего к уравнениям, описывающим акустическое движение. Из (9) в линейном приближении получаем уравнение непрерывности и уравнение Эйлера в виде

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = 0. \quad (12)$$

В квадратичном же приближении имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} &= \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\partial \eta^2}{\partial \tau} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \eta \zeta}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} &= -\frac{1}{\gamma} \eta \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} - \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial \zeta^2}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

Используя линейные соотношения (12), приведем эти уравнения к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} &= \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial}{\partial \tau} (\gamma \eta^2 + \zeta^2), \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} &= \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial}{\partial \xi} (\eta^2 - \zeta^2). \end{aligned} \quad (13)$$

В простейшем случае классической акустики, где уравнения линейны, а на границах заданы нулевые условия для возмущений скорости газа, решение представляется суммой гармоник:

$$\eta^{(cl)} = \sum_{n=1}^{\infty} (P_n e^{i\omega_n \tau} + \text{c.c.}) \cos k_n \xi,$$

$$\zeta^{(cl)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-iP_n e^{i\omega_n \tau} + \text{c.c.}) \sin k_n \xi.$$

Здесь символ с.с. означает комплексное сопряжение, а  $P_n$  – постоянные амплитуды, значения которых в линейном приближении не определены; частоты и волновые векторы для любой гармоники в выбранных безразмерных переменных одинаковы:

$$\omega_n = n\pi, \quad k_n = n\pi. \quad (14)$$

В рассматриваемой нами задаче граничные условия на поверхности горения ( $\xi = 0$ ) и на сопле ( $\xi = 1$ ) исключают возможность возникновения узлов возмущений скорости газа на границах камеры сгорания, которые имеют порядок числа Маха. Это обстоятельство и нелинейность уравнений акустики приводит к зависимости амплитуд колебаний давления и скорости газа от времени. Будем искать решение задачи в виде

$$\begin{aligned} \eta &= \sum_{n=1}^{\infty} [(\eta_n(\tau) e^{i\omega_n \tau} + \text{c.c.}) \cos k_n \xi + \\ &\quad + M f_\eta(\tau) \sin k_n \xi], \\ \zeta &= \sum_{n=1}^{\infty} [(-i\eta_n(\tau) e^{i\omega_n \tau} + \text{c.c.}) \sin k_n \xi + \\ &\quad + M f_\zeta(\tau) \cos k_n \xi], \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\eta_n(\tau)$  – амплитуды, изменения которых со временем происходит в масштабе медленного времени, а  $f(\tau)$  – функции порядка  $\eta_n$ , содержащие как медленное, так и быстрое время. Их явный вид в дальнейшем не понадобится.

Найдем уравнения для комплексных амплитуд колебаний  $\eta_n$ .

Умножим уравнение непрерывности (13) на  $\cos k_n \xi$  и проинтегрируем по пространственной координате от нуля до единицы, используя разложения (15). При этом интеграл от производной по координате интегрируем по частям. Сокращая результат на множитель  $\exp(i\omega_n \tau)$ , выделим тем самым медленное движение. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d\eta_n}{d\tau} &= \left[ -\zeta \cos k_n \xi \Big|_{\xi=1} + \zeta \Big|_{\xi=0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\omega_n}{2\gamma} \int_0^1 (\gamma \eta^2 + \zeta^2) \cos k_n \xi d\xi \right]_{\omega_n} \end{aligned}$$

где выражение с индексом  $\omega_n$  означает, что оно является коэффициентом при множителе  $\exp(i\omega_n\tau)$ .

Поступая аналогичным образом с уравнением Эйлера (13), имеем

$$\frac{1}{2} \frac{d\eta_n}{d\tau} = -\frac{ik_n}{2\gamma} \left[ \int_0^1 (\eta^2 - \zeta^2) \cos k_n \xi d\xi \right]_{\omega_n}.$$

Сложение двух последних соотношений дает уравнение для амплитуды колебаний:

$$\frac{d\eta_n}{d\tau} = \left\{ -\zeta \cos k_n \xi \Big|_{\xi=1} + \zeta \Big|_{\xi=0} + \frac{i\omega_n}{2\gamma} \int_0^1 [(\gamma-1)\eta^2 + 2\zeta^2] \cos k_n \xi d\xi \right\}_{\omega_n}. \quad (16)$$

Три члена правой части соответствуют вкладам от сопла, поверхности горения и акустической нелинейности.

В задаче присутствуют две малые величины – число Маха и амплитуда колебаний. В дальнейшем удерживаем члены порядка  $Ma\eta_k$  и  $\eta_k\eta_i$ .

Используя граничное условие на сопле (11), для первого члена правой части уравнения (16) находим

$$\{-\zeta \cos k_n \xi \Big|_{\xi=1}\}_{\omega_n} = -M \frac{\gamma-1}{2} \eta_n. \quad (17)$$

Для вычисления третьего члена правой части уравнения (16) используем составляющие (15), не содержащие числа Маха. Простые вычисления приводят к следующему результату:

$$\left\{ \frac{i\omega_n}{2\gamma} \int_0^1 [(\gamma-1)\eta^2 + 2\zeta^2] \cos k_n \xi d\xi \right\}_{\omega_n} = \frac{in\pi(\gamma+1)}{2\gamma} \left( \sum_{s=1}^{n-1} \eta_s \eta_{n-s} + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \bar{\eta}_s \eta_{n+s} \right), \quad (18)$$

где черта в правой части (18) означает комплексное сопряжение.

При вычислении второго члена правой части уравнения (16), описывающего горение, возникают члены порядка  $MU_{ks}\eta_k\eta_s$ , содержащие нелинейную функцию отклика скорости горения на осциллирующее давление  $U_{ks}$ . Как показано в [10], она может быть достаточно велика. Поэтому величины указанного порядка тоже удерживаются в дальнейших вычислениях.

Из (11) находим в рассматриваемом приближении связь между изменениями скорости газа на

поверхности горения  $\zeta$ , линейной скоростью горения топлива  $v$  и давления  $\eta$ :

$$\zeta = \gamma M \left( v - \frac{\eta}{\gamma} \right).$$

В работе [10] показано, что

$$v_n = U_n \eta_n + \sum_{s=1}^{n-1} U_{s,n-s} \eta_s \eta_{n-s} + \sum_{s=1}^{\infty} U_{n+s,-s} \bar{\eta}_s \eta_{n+s},$$

где  $U_s$  и  $U_{k,s}$  – так называемые линейная и квадратичная функции отклика скорости горения топлива на гармонически меняющееся давление. Имея в виду вышеуказанные соотношения, для второго члена правой части уравнения (16) находим

$$\left\{ \zeta \Big|_{\xi=0} \right\}_{\omega_n} = M \left[ (\gamma U_n - 1) \eta_n + \gamma \left( \sum_{s=1}^{n-1} U_{s,n-s} \eta_s \eta_{n-s} + \sum_{s=1}^{\infty} U_{n+s,-s} \bar{\eta}_s \eta_{n+s} \right) \right]. \quad (19)$$

Полученные соотношения (17)–(19) приводят к окончательному виду уравнения для комплексной амплитуды колебаний давления:

$$\frac{d\eta_n}{d\tau} = L_n \eta_n + \sum_{s=1}^{n-1} H_{n,s} \eta_s \eta_{n-s} + \sum_{s=1}^{m-n} G_{n,s} \bar{\eta}_s \eta_{n+s}, \quad n = 1, 2 \dots m, \quad L_n = M \left( \gamma U_n - \frac{\gamma+1}{2} \right), \quad (20)$$

$$H_{n,s} = \frac{in\pi(\gamma+1)}{8\gamma} + M\gamma U_{n-s,s},$$

$$G_{n,s} = \frac{in\pi(\gamma+1)}{4\gamma} + M\gamma U_{n+s,-s},$$

причем  $m$  – число рассматриваемых гармоник.

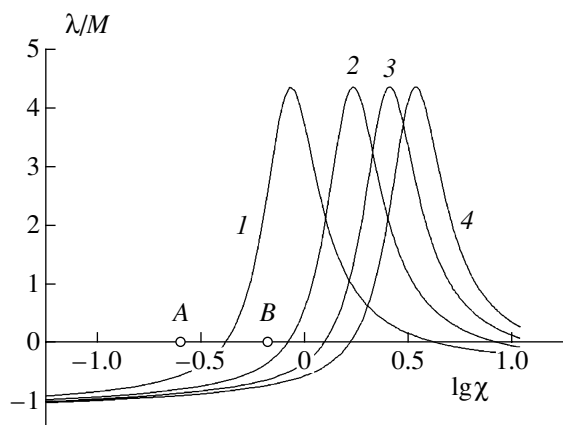
Линейные и квадратичные функции отклика для модели горения (3) имеют вид [10]

$$U_{s,l} = \left( 1 - \frac{\delta_{s,l}}{2} \right) U_{s+l} \times \left[ \frac{U_s U_l}{v} (kK_{s,l} + rR_{s,l} - 1) + U_s + U_l - 1 \right], \quad (21)$$

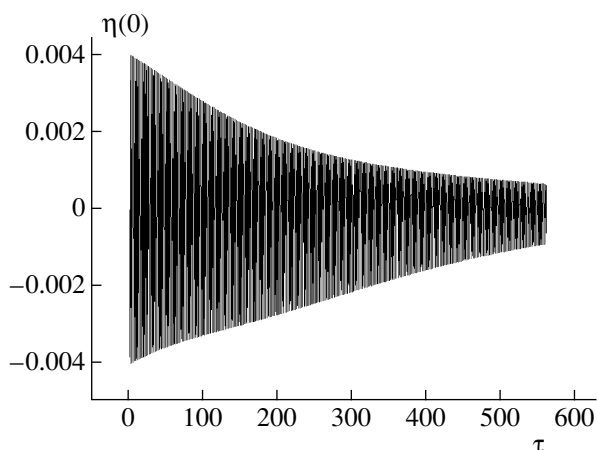
$$K_{s,l} = \frac{s+l}{z_{s+l} s l} \left( \frac{s+l}{z_{s+l}} - \frac{s}{z_s} - \frac{l}{z_l} \right),$$

$$R_{s,l} = \frac{(s+l)^2}{sl} - \frac{s+l}{z_{s+l} s l} (s z_s + l z_l) + z_{s+l} - 1,$$

причем  $\delta_{s,l}$  – символ Кронекера, а линейная функция отклика и характеристические корни  $z_n$ , най-



**Рис. 1.** Зависимость инкремента амплитуды колебаний от аппаратной константы. Цифры у кривых обозначают номера гармоник.



**Рис. 3.** Изменение амплитуды колебаний давления со временем. Вариант А.

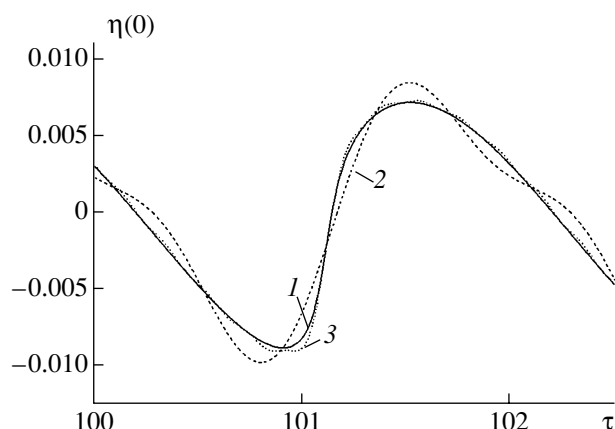
денные в [11], представляются выражениями

$$U_n = \frac{\nu}{1 + (z_n - 1)(r - k/z_n)}, \quad (22)$$

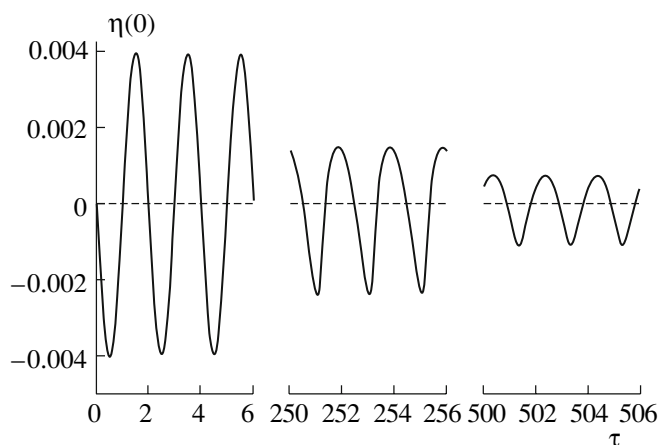
$$z_n = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + 4i \frac{n\pi}{\chi}} \right).$$

Вещественная часть коэффициента  $L_n$  определяет характер развития колебаний в линейном приближении. Если она положительна, колебания раскачиваются, и наоборот. Обозначим инкремент развития колебания  $n$ -й гармоники как  $\lambda_n = \text{Re}L_n$ .

На рис. 1 показаны отношения инкремента к числу Маха для первых четырех гармоник в зависимости от величины аппаратной константы. При этом приняты следующие значения параметров, характеризующих задачу:  $\nu = 0.7$ ,  $k = 1.8$ ,  $r = 0.35$ ,



**Рис. 2.** Сравнение результатов расчета полной задачи и приближенного метода. Вариант В: 1 – численный счет, 2 – приближенный метод для двух гармоник, 3 – приближенный метод для десяти гармоник.



**Рис. 4.** Эволюция формы колебаний со временем. Вариант А.

$\gamma = 1.25$ . При  $\chi = 0.25$  (точка А) – все гармоники в линейном приближении устойчивы. При  $\chi = 2/3$  (точка В) – первая гармоника в линейном приближении неустойчива.

## РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

При численном интегрировании задачи (9)–(11) возникают трудности, связанные с наличием двух масштабов времени, отличающихся на три порядка. Поэтому для нахождения эффекта изменения амплитуды колебаний необходимо просчитать несколько сот периодов колебаний. При этом должна быть сохранена точность вычисления на каждом периоде. С этой целью был применен метод матричной прогонки с использованием неявной разностной схемы второго порядка точности по пространству и схемы второго порядка точности по времени в конденсированной фазе. При со-

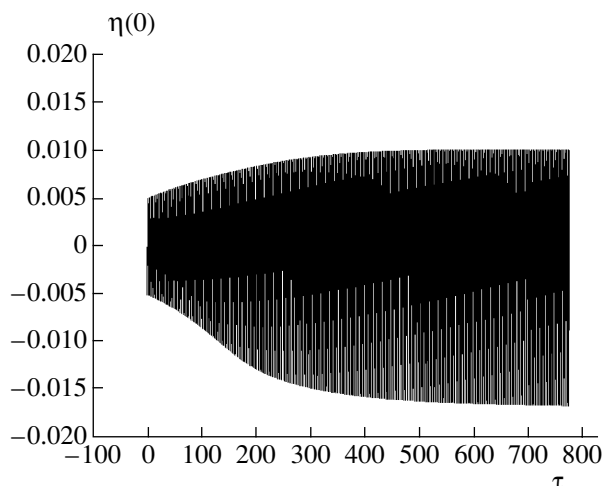


Рис. 5. Изменение амплитуды колебаний давления со временем. Вариант В.

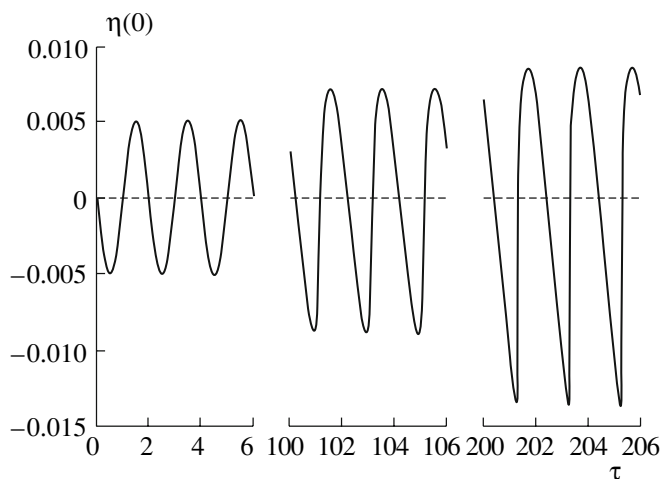


Рис. 6. Эволюция формы колебаний со временем. Вариант В.

здании алгоритма численного интегрирования задачи особое внимание уделялось точности вычисления градиента температуры на границе раздела фаз. С этой целью сходимость итерационного процесса учитывала не только функции  $\theta(\xi, \tau)$ ,  $\eta(\xi, \tau)$ ,  $\zeta(\xi, \tau)$ ,  $v(\tau)$ , но и  $\varphi(\tau)$ . Программа предполагает изменение шага по времени в зависимости от сходимости итерационного процесса. Шаг пространственной сетки постояен в газовой фазе и может увеличиваться в конденсированной фазе по мере удаления от границы раздела фаз. Расчет одного варианта до времени тысячного порядка требует нескольких часов работы компьютера средней мощности.

При применении приближенного метода необходимо задать число рассматриваемых гармоник  $m$ . Максимальное значение этой величины равнялось десяти. Расчет одного варианта с применением пакета программ Mathematica требует всего нескольких секунд.

В качестве начального условия задавалось возмущение первой гармоники скорости газа. При решении полной задачи это условие записывается в виде

$$\zeta(\xi, 0) = Z \sin \pi \xi,$$

где  $Z$  – амплитуда возмущения. При использовании приближенного метода начальное условие записывается как

$$\eta_1(0) = \frac{i}{2} Z.$$

Ниже приводятся результаты расчетов для двух вариантов А и В. Для обоих вариантов  $v = 0.7$ ,  $k = 1.8$ ,  $r = 0.35$  и  $\gamma = 1.25$ . В варианте А принималось:  $\chi = 0.25$ ,  $M = 4 \cdot 10^{-3}$  и  $Z = 4 \cdot 10^{-3}$ , в варианте В –  $\chi = 2/3$ ,  $M = 2 \cdot 10^{-3}$  и  $Z = 5 \cdot 10^{-3}$ .

На рис. 2 проведен результат счета полной задачи и сравнение его с приближенным методом. Применение двухмодового приближения дает ошибку порядка двух десятков процентов. При использовании десяти гармоник совпадение практически полное.

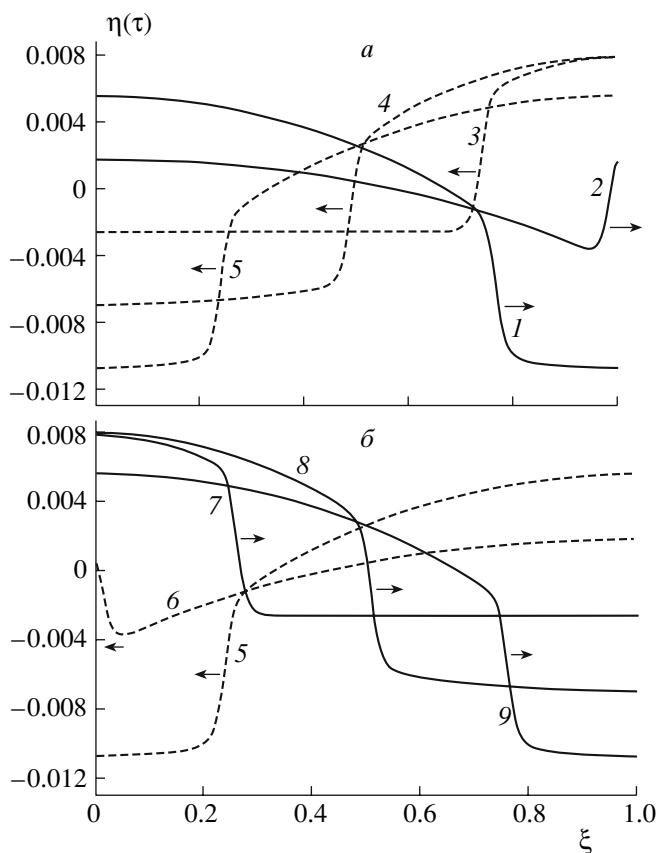


Рис. 7. Движение фронта возмущения давления. Вариант В.  $\tau$ : 1 – 170.00, 2 – 170.25, 3 – 170.50, 4 – 170.75, 5 – 171.00, 6 – 171.25, 7 – 171.50, 8 – 171.75, 9 – 172.00.

Следующие два рисунка иллюстрируют временную зависимость возмущений давления для варианта А. Они построены в различных масштабах времени. На рис. 3 изображена полная картина, на которой не могут быть разрешены отдельные периоды колебаний. Рис. 4 иллюстрирует эволюцию колебаний в различных временных интервалах. Ясно виден нелинейный характер колебаний.

Аналогичные графики для варианта В приведены на рис. 5 и 6. В этом варианте происходит увеличение амплитуды со временем, сопровождающееся возникновением крутых фронтов возмущений давления, в результате чего могут возникнуть ударные волны. По этой причине точность счета со временем падает. В приближенном же методе возрастает роль высших гармоник.

Образование крутых фронтов возмущений давления проиллюстрировано на рис. 7а и б. Первый из них описывает случай отражения волны давления от сопла, второй – от поверхности горения.

Авторы выражают признательность В.С. Посьянскому за обсуждение метода численного счета и полезные советы.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 05-03-33093).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Combustion Stability of Solid-Propellant/De Luca L., Price E.W., Summerfield M., eds. Progress in Astronautics and Aeronautics. V. 143. Washington: AIAA, 1992.
2. Culick F.E.C., Yang V. // Combustion Stability of Solid-Propellant/De Luca L., Price E.W., Summerfield M., eds. Progress in Astronautics and Aeronautics. V. 143, Washington: AIAA, 1992. P. 719.
3. Culick F.E.C. AIAA-2000-3178, 36th AIAA Propulsion Conf. and Exhibit. Huntsville, Alabama, 2000.
4. Новожилов Б.В. // Физика горения и взрыва. 2007. Т. 43. № 4. С. 66.
5. Новожилов Б.В., Каганова З.И., Беляев А.А. // Хим. физика. 2007. Т. 26. № 3. С. 34.
6. Зельдович Я.Б. // ЖЭТФ. 1942. Т. 12. С. 498.
7. Новожилов Б.В. // ЖПМТФ. 1965. № 4. С. 157.
8. Новожилов Б.В. Нестационарное горение твердых ракетных топлив. М.: Наука, 1973.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
10. Новожилов Б.В. // Хим. физика. 2006. Т. 25. № 8. С. 32.
11. Новожилов Б.В. // ЖПМТФ. 1965. № 6. С. 141.