Письма в ЖЭТФ, том 118, вып. 4, с. 234 – 239 

# Вероятность высоких интенсивностей световой волны, распространяющейся в турбулентной атмосфере

*И. В. Колоколов*[1], *В. В. Лебедев*

*Институт теоретической физики имени Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия*

*Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", 101000 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 13 июля 2023 г.
После переработки 13 июля 2023 г.
Принята к публикации 14 июля 2023 г.

Мы исследуем статистику флуктуаций интенсивности лазерного луча при его распространении в турбулентной атмосфере. Нас интересуют относительно большие расстояния распространения и дальний хвост функции распределения вероятности. Хвост определяется растянутой экспонентой, мы находим ее показатель.

DOI: 10.31857/S1234567823160024, EDN: isxdln

Предметом нашей работы является теоретическое изучение физических свойств лазерного луча, распространяющегося в турбулентной атмосфере или, более общо, электромагнитной волны в турбулентной среде. Основной эффект, который исследуется в рамках данной проблемы – дифракция лазерного луча на флуктуациях коэффициента преломления, которые индуцируются флуктуациями давления турбулентных пульсаций. Флуктуации коэффициента преломления являются случайным полем, свойства которого описываются статистически. Поэтому теоретические предсказания поведения лазерного луча касаются средних значений (или соответствующих функций распределения вероятности), которые получаются усреднением по статистике флуктуаций.

Задача о распространении лазерного луча в атмосфере имеет долгую историю. Базисные теоретические результаты, касающиеся распространения лазерного луча в турбулентной атмосфере, были получены еще в шестидесятые-семидесятые годы прошлого века, они подытожены в ряде монографий [1–5]. В последнее время наблюдается возрождение интереса к данной тематике [6–10], связанное в основном с численным моделированием процесса распространения лазерного луча (электромагнитной волны) в турбулентной среде, которое позволяет получить детальную информацию о процессе.

Известные теоретические результаты описывают в основном типичное поведение лазерного луча в атмосфере. В то же время в уравнении для электромагнитного поля случайный показатель преломления является мультипликативным шумом, что ведет к весьма нетривиальным статистическим свойствам электромагнитного поля. Можно ожидать, что вероятность редких событий, когда та или иная величина (скажем, интенсивность электромагнитного поля) имеет аномально большое значение, окажется существенно выше наивных оценок, основанных на анализе типичных процессов. В качестве примера подобного поведения можно привести статистику квантовых частиц в случайном потенциале (см., например, [11]), который является мультипликативным шумом в уравнении Шредингера для квантовой частицы.

Мы теоретически изучаем распространение монохроматической электромагнитной волны в неограниченной турбулентной среде. Все характерные масштабы задачи (размер волнового пакета, длина его распространения) предполагаются значительно превышающими длину волны, так что применимо описание волны в терминах комплексной огибающей $\Psi$. В силу большого значения скорости света можно считать, что состояние среды не меняется за время распространения волны и использовать стационарное приближение для описания ее огибающей, т.е. считать $\Psi$ функцией координаты $z$ в направлении распространения волны, и двумерного радиус-вектора $\mathbf{r}$ в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. Конечно, состояние турбулентной среды меняется со временем. В принятом приближении огибающая $\Psi(\mathbf{r}, z)$ адиабатически подстраивается под текущее состояние среды.

В данной работе мы считаем интенсивность электромагнитной волны достаточно малой, так что нелинейные эффекты (типа самофокусировки) явля-

[1]e-mail: igor.kolokolov@gmail.com

ются несущественными. Тогда уравнение для огибающей $\Psi(\mathbf{r}, z)$ в подходящих единицах измерения имеет вид двумерного уравнения Шредингера

$$i\partial_z \Psi + \nabla^2 \Psi + \xi \Psi = 0, \tag{1}$$

где $\nabla$ – двумерный градиент в поперечной к направлению распространения плоскости, а $\xi(\mathbf{r}, z)$ – флуктуирующая составляющая показателя преломления. В силу уравнения (1) огибающая $\Psi$ является полем, зависящим от реализации $\xi$. Последняя меняется со временем, приводя к изменению огибающей. Поэтому $\Psi$ можно рассматривать как случайное поле, статистические свойства которого можно извлечь усреднением по большим временам.

Расстояние, пройденное волной, предполагается существенно превышающим интегральный масштаб турбулентности, тогда как поперечный размер волнового пакета предполагается меньшим, чем интегральный масштаб. В этом случае показатель преломления $\xi$ быстро флуктуирует вдоль направления распространения волны. Нас интересуют интегральные характеристики, связанные с $\xi$, поэтому в силу центральной предельной теоремы статистика $\xi$ может считаться Гауссовой. Эта статистика определяется парной корреляционной функцией флуктуаций показателя преломления:

$$\langle \xi(\mathbf{r}_1, z_1)\xi(\mathbf{r}_2, z_2)\rangle = \delta(z_1 - z_2)\left[\mathrm{const} - r_{12}^c\right], \tag{2}$$

где угловые скобки означают усреднение по реализациям состояния среды, $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ и $c$ – некоторое число. Выражение (2) справедливо для расстояний $r_{12}$, лежащих в инерционном интервале турбулентности. Константа в соотношении (2) определяется турбулентными флуктуациями на интегральном масштабе, а степенная поправка – флуктуациями на масштабах $\sim r_{12}$. Флуктуации показателя преломления $\xi$ в турбулентной среде определяются в основном флуктуациями давления. Для колмогоровского спектра показатель степени $c$ в выражении (2) равен $c = 5/3$. В дальнейшем показатель $c$ будет считаться произвольным числом, лежащим в интервале $1 < c < 2$.

Мы сосредоточимся в основном на статистических свойствах интенсивности $I$ лазерного луча (электромагнитной волны) в некоторой точке наблюдения, которую мы выберем за начало координат: $I = |\Psi(\mathbf{r} = 0, z)|^2$. Расстояние $z$, пройденное лучом, будет считаться большим, $z \gg 1$ в наших единицах. Это означает, что эффекты, связанные со случайной дифракцией, являются сильными. В качестве начального состояния мы выбираем плоскую волну, $\Psi(\mathbf{r}, 0) = 1$. Обобщение нашей схемы вычислений на другие случаи, скажем, на начальный Гауссов пучок, будет опубликовано в другом месте. Нас будут интересовать моменты $\langle I^n\rangle$ при больших значениях $n$. Именно эти величины определяют вероятность событий с аномально большим значением интенсивности.

Среднее значение $\langle I^n\rangle$ может быть записано, как $\langle I^n\rangle = F_{2n}(\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, z)$, где $F_{2n}$ – $2n$-точечная корреляционная функция огибающей:

$$F_{2n}(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_{2n}, z) = \\ = \langle \Psi(\mathbf{r}_1, z)\ldots\Psi(\mathbf{r}_n, z)\Psi^\star(\mathbf{r}_{n+1}, z)\ldots\Psi^\star(\mathbf{r}_{2n}, z)\rangle. \tag{3}$$

Эта корреляционная функция представляется в виде свертки с функцией Грина $\mathcal{G}_{2n}$:

$$F_{2n} = \int d^2x_1 \ldots d^2x_{2n}\mathcal{G}_{2n}\Psi_{in}(\mathbf{x}_1)\ldots\Psi_{in}^\star(\mathbf{x}_{2n}). \tag{4}$$

Здесь $\Psi_{in}(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r}, z = 0)$ – начальное значение огибающей, а функция Грина

$$\mathcal{G}_{2n} = \mathcal{G}_{2n}(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_{2n}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{2n}, z) \tag{5}$$

зависит от $z$ и $4n$ радиус-векторов.

Функция Грина может быть представлена в виде интеграла по путям, который выводится из уравнения Шредингера (1). После усреднения по флуктуациям показателя преломления в соответствии с выражением (2), мы приходим к интегралу по переменным $\mathbf{y}_j$, которые являются функциями координаты $\zeta$, $0 < \zeta < z$:

$$\mathcal{G}_{2n} = \int \prod_{j=1}^{2n} D\mathbf{y}_j \exp\left\{\int_0^z d\zeta\, \left(\frac{i}{4}K + W\right)\right\}, \tag{6}$$

$$K = \left(\frac{d\mathbf{y}_1}{d\zeta}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{d\mathbf{y}_n}{d\zeta}\right)^2 - \\ - \left(\frac{d\mathbf{y}_{n+1}}{d\zeta}\right)^2 - \cdots - \left(\frac{d\mathbf{y}_{2n}}{d\zeta}\right)^2, \tag{7}$$

$$W = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} y_{ij}^c + \sum_{i=n+1}^{2n}\sum_{j=i+1}^{2n} y_{ij}^c - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{2n} y_{ij}^c. \tag{8}$$

Граничными условиями для траекторий $\mathbf{y}_j(\zeta)$ при $\zeta = 0$ и $\zeta = z$ являются аргументы функции Грина $\mathbf{x}_j$ и $\mathbf{r}_j$, см. (5). "Потенциал" $W$ (8) зависит от переменных $y_{ij} = |\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j|$. Как и следует, константа, фигурирующая в выражении (2), выпадает из рассмотрения.

Можно найти явное выражение для парной функции Грина $\mathcal{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, z)$:

$$\mathcal{G} = \frac{\theta(z)}{16\pi^2 z^2} \exp\left[\frac{i}{2z}(\mathbf{r}-\mathbf{x})(\mathbf{R}-\mathbf{X}) - \right.$$
$$\left. - z\int_0^1 d\chi\, |\chi\mathbf{x} + (1-\chi)\mathbf{r}|^c\right], \qquad (9)$$

которая определяет поведение парной корреляционной функции. Здесь введены обозначения $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)/2$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$.

Для начального состояния в виде плоской волны, когда $\Psi_{in} = 1$, парная корреляционная функция имеет простой вид [12, 13]:

$$F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z) = \int d^2x\, d^2X \mathcal{G} = \exp(-z|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^c). \quad (10)$$

Таким образом, характерное расстояние между точками 1 и 2 на расстоянии $z$ равно $r_{ph} = z^{-1/c} \ll 1$. Эта величина имеет смысл длины сбоя фазы за счет флуктуаций показателя преломления. Характерное же значение переменной $X$ оценивается, как $z^{1/c+1}$.

Анализ $2n$-точечной функции Грина (5) показывает, что при $z \gg 1$ она имеет резкие максимумы на конфигурациях, когда имеется $n$ пар близких точек $\mathbf{x}_j$, находящихся на расстояниях порядка $r_{ph}$, и разделенных гораздо большими расстояниями [13, 14]. При этом первая точка пары берется из набора $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, а вторая – из набора $\mathbf{x}_{n+1}, \dots, \mathbf{x}_{2n}$. Остаются близкими и траектории $\mathbf{y}_j(\zeta)$ в интеграле по путям (6), стартующие с близких точек $\mathbf{x}_j$. В этом случае "потенциал" $W$ (8) может быть приближен суммой $y_{ij}^c$ по парам, а остальные слагаемые в сумме (8) взаимно сокращают друг друга. Тогда функция Грина факторизуется. Например, для близких пар $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{n+1}), \dots (\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{2n})$

$$\mathcal{G}_{2n} = \mathcal{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{n+1}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{n+1}, z)$$
$$\dots \mathcal{G}(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_{2n}, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{2n}, z). \qquad (11)$$

Очевидно, имеется $n!$ подобных вкладов, по числу разбиений $\mathbf{x}_j$ на пары.

Таким образом, пространство интегрирования по начальным координатам в выражении для моментов интенсивности

$$\langle I^n \rangle = \int d^2x_1 \dots d^2x_{2n} \mathcal{G}_{2n}(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{2n}), \quad (12)$$

в случае начальной плоской волны разбивается на $n!$ областей, соответствующих различным разбиениям точек на пары. Вклады всех таких областей одинаковы и в главном приближении для моментов интенсивности мы получаем $\langle I^n \rangle = n!$, что означает экспоненциальную функцию распределения вероятности $P(I) = \exp(-I)$. Отметим, что $P(I) = \exp(-I)$ соответствует Гауссовой статистике поля $\Psi$, естественной для комплексного поля со случайной фазой.

В работах [13–15] показано, что поправки к приближению (11), связанные с отброшенными членами в выражении (8) для $W$, пропорциональны параметру $\alpha$:

$$\alpha = z^{-a}, \quad a = \frac{4}{c} - c, \qquad (13)$$

малому при $z \gg 1$. Для колмогоровского спектра турбулентности показатель $a$ равен $a = 11/15$. Поправки к значению $\langle I^n \rangle = n!$ растут с номером $n$ и становятся существенными, когда $\alpha n \sim 1$. В данной работе мы определяем значение $\langle I^n \rangle$ при $\alpha n \gg 1$ и демонстрируем, что они существенно превышают $n!$. Другими словами, при $I \gg \alpha^{-1}$ возникает хвост функции распределения вероятности $P(I)$, существенно превышающий $\exp(-I)$.

При $\alpha n \gg 1$ пространство интегрирования в интеграле (12) по-прежнему разбивается на $n!$ областей, соответствующих хорошо разделенным парам траекторий $\mathbf{y}_j(\zeta)$, дающим одинаковый вклад в $\langle I^n \rangle$. Выберем для определенности одно из таких разбиений на пары: $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_{n+1}), \dots (\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{2n})$. Вводя переменные $\mathbf{Y}_j = (\mathbf{y}_j + \mathbf{y}_{j+n})/2$ и $\boldsymbol{\rho}_j = \mathbf{y}_j - \mathbf{y}_{j+n}$, где $j$ пробегает значения от 1 до $n$, мы получим функциональное представление для функции Грина с аргументами в выбранной области в виде:

$$\mathcal{G} = \int \prod_{j=1}^n D\mathbf{Y}_j\, D\boldsymbol{\rho}_j\, \exp\left(-\mathcal{S}\right). \qquad (14)$$

В интеграле по путям (14) подразумеваются некоторые ненулевые начальные значения $\mathbf{Y}_j(0) = \mathbf{X}_j$ и нулевые конечные значения (при $\zeta = z$) для траекторий $\mathbf{Y}_j$ и $\boldsymbol{\rho}_j$, которые диктуются исследуемой величиной $\langle I^n \rangle$.

Как следует из представления (6), действие $\mathcal{S}$ в выражении (14) равно

$$\mathcal{S} = -\frac{i}{2}\sum_j \int_0^z d\zeta\, \frac{d\mathbf{Y}_j}{d\zeta}\frac{d\boldsymbol{\rho}_j}{d\zeta} + \sum_j \int_0^z d\zeta\, \rho_j^c +$$
$$+ \sum_{j>k} \int_0^z d\zeta\, U(\mathbf{Y}_j - \mathbf{Y}_k, \boldsymbol{\rho}_j, \boldsymbol{\rho}_k). \qquad (15)$$

В этом выражении индексы $j, k$ пробегают значения от 1 до $n$. Величина $U$ при $\boldsymbol{\rho}_j$, малых в сравнении с характерными значениями $\mathbf{Y}_j - \mathbf{Y}_k$, определяется формулой, следующей из выражения (8):

$$U(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \approx \rho_{1,\alpha}\rho_{2,\beta} V_{\alpha\beta}(\mathbf{R}), \qquad (16)$$

$$V_{\alpha\beta}(\mathbf{R}) = cR^{c-2}\left[\delta_{\alpha\beta} + (c-2)\frac{R_\alpha R_\beta}{R^2}\right]. \qquad (17)$$

Здесь греческие индексы $\alpha, \beta$ нумеруют компоненты векторов в плоскости, поперечной к направлению распространения волны.

Как мы увидим ниже, значения $\mathbf{Y}_j$ в интеграле (14) параметрически велики по $n$. Это позволяет вычислять интеграл по $\mathbf{Y}_j$ в выражении (14) в перевальном приближении. Интеграл же по $\boldsymbol{\rho}_j$ не является перевальным.

Исследуем сначала перевальное значение $\mathbf{Y}_j$, которое определяется условием экстремума $\delta\mathcal{G}/\delta\mathbf{Y}_j = 0$. Подставляя сюда выражение (14), находим уравнение

$$\frac{i}{2}\frac{d^2\bar{\boldsymbol{\rho}}_j}{d\zeta^2} + \sum_{k\neq j}\frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{Y}_j}(\mathbf{Y}_j - \mathbf{Y}_k)\bar{\rho}_{j\alpha}\bar{\rho}_{k\beta} = 0. \tag{18}$$

Здесь $\bar{\boldsymbol{\rho}}_j$ – среднее значение $\boldsymbol{\rho}_j$, наличие которого связано с ненулевыми начальными значениями $\mathbf{X}_j$ траекторий $\mathbf{Y}_j$. При выводе соотношения (18) мы заменили среднее от произведения $\rho_{j\alpha}\rho_{k\beta}$ на произведение средних. Причина этого заключается в том, что флуктуации $\boldsymbol{\rho}_j$ определяются в основном вторым слагаемым в действии (15), которое диагонально по $j$. Поэтому вклад флуктуаций в среднее $\rho_{j\alpha}\rho_{k\beta}$, где $j \neq k$, оказывается пренебрежимо малым.

В теории поля среднее значение флуктуирующего поля находится из условия экстремума так называемого квантового эффективного действия (см., например, [16]). В исследуемой задаче это условие эквивалентно соотношению $\delta\mathcal{G}/\delta\bar{\boldsymbol{\rho}}_j = 0$, которое определяет среднее $\bar{\boldsymbol{\rho}}_j$. Используя выражение (14), находим уравнение

$$\frac{i}{2}\frac{d^2 Y_{j\alpha}}{d\zeta^2} + \sum_{k\neq j} V_{\alpha\beta}(\mathbf{Y}_j - \mathbf{Y}_k)\bar{\rho}_{k\beta} = 0, \tag{19}$$

при выводе которого мы пренебрегли вкладом второго слагаемого в действии (15). Дело в том, что флуктуации $\boldsymbol{\rho}_j$ (которые определяются в основном этим членом) оказываются много больше $\bar{\boldsymbol{\rho}}_j$, в силу чего зависимость второго слагаемого от $\bar{\boldsymbol{\rho}}_j$ слаба. В дальнейшем мы обоснуем это пренебрежение. Отметим, что условие экстремума по начальному значению $\bar{\boldsymbol{\rho}}_j(0)$ приводит к условию $d\mathbf{Y}_j/d\zeta(0) = 0$, в силу структуры действия (15).

Уравнения (18), (19) показывают, что перевальное значение выражения (14) записывается в виде

$$\ln\mathcal{G}_{sp} = \frac{i}{2}\sum_j\int_0^z d\zeta\,\frac{d\mathbf{Y}_j}{d\zeta}\frac{d\bar{\boldsymbol{\rho}}_j}{d\zeta} - $$
$$-\sum_{j>k}\int_0^z d\zeta\,\bar{\rho}_{1,\alpha}\bar{\rho}_{2,\beta}V_{\alpha\beta}(\mathbf{Y}_j - \mathbf{Y}_k) =$$
$$= \sum_{j>k}\int_0^z d\zeta\,V_{\alpha\beta}(\mathbf{Y}_j - \mathbf{Y}_k)\bar{\rho}_{j,\alpha}\bar{\rho}_{k,\beta}. \tag{20}$$

Последнее равенство в (20) получено после интегрирования по частям с учетом уравнения (19) и граничных условий. Величина (20) отрицательна, поскольку $\mathbf{Y}_j$ – вещественные величины, тогда как средние $\bar{\boldsymbol{\rho}}_j$ – чисто мнимые величины, а функция $V_{\alpha\beta}(\mathbf{Y}_j - \mathbf{Y}_k)$ положительна для рассматриваемых здесь значений показателя $c$: $1 < c < 2$.

Система уравнений (18), (19) позволяет оценить перевальное значение (20). Считая, что все величины $Y_j$ вместе с их граничными значениями имеют один порядок $Y_j \sim X$, равно как и средние $\bar{\rho}_j \sim i\bar{\rho}$, мы приходим к оценкам

$$\bar{\rho} \sim (nz^2)^{-1}X^{3-c}, \quad \ln\mathcal{G}_{sp} \sim -\frac{1}{z^3}X^{4-c}. \tag{21}$$

Отметим отсутствие зависимости от $n$ в оценке для $\ln\mathcal{G}_{sp}$.

Теперь мы переходим к учету флуктуационного вклада в $\mathcal{G}_{2n}$. Флуктуации $\boldsymbol{\rho}_j$ могут быть оценены как $z^{-1/c}$, что много больше среднего $\bar{\rho}$ (21). Это приводит к тому, что после сдвига $\boldsymbol{\rho}_j$ на его среднее значение и сдвига $\mathbf{Y}_j$ на его перевальное значение эффектами, связанными с “потенциалом взаимодействия” (16) можно пренебречь (оценку точности см. ниже). В результате мы приходим к факторизованному приближению типа (11). Таким образом, выражение для функции Грина факторизуется $\mathcal{G}_{2n} = \mathcal{G}_{sp}\mathcal{G}_{fl}$, где $\mathcal{G}_{sp}$ определяется выражением (20) и флуктуационный множитель дается произведением парных функций Грина

$$\mathcal{G}_{fl} = \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{16\pi^2 z^2}\exp\left[-\frac{z}{c+1}|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j+n}|^c\right]. \tag{22}$$

Стоящее здесь выражение для парной функции Грина получено из общей формулы (9) после подстановки $\mathbf{r} = \mathbf{R} = \mathbf{0}$ и с учетом того, что начальные значения сдвинутых переменных $\mathbf{Y}_j - \mathbf{X}_j$ являются нулевыми.

Возвращаясь к выражению (12) для моментов интенсивности, мы находим

$$\frac{\langle I^n\rangle}{n!} = \int d^2x_1\ldots d^2x_{2n}\mathcal{G}_{sp}\mathcal{G}_{fl}. \tag{23}$$

Фактор $\mathcal{G}_{sp}$ зависит только от координат центров пар $\mathbf{X}_j = (\mathbf{x}_j + \mathbf{x}_{j+n})/2$, поэтому после интегрирования по разностям $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j+n}$ мы находим

$$\frac{\langle I^n\rangle}{n!} \sim z^{-2(1+1/c)}\int d^2X_1\ldots d^2X_n\,\mathcal{G}_{sp}. \tag{24}$$

При большом $n$ значение интеграла (24) оценивается как:

$$\ln \frac{\langle I^n \rangle}{n!} \sim 2n \ln X - 2n \left(1 + \frac{1}{c}\right) \ln z - \frac{C}{z^3} X^{4-c}, \quad (25)$$

где $C$ – константа порядка единицы. Здесь $X$ – введенное выше характерное значение переменных $\mathbf{X}_j$.

Оптимизируя выражение (25) по $X$, находим:

$$X^{4-c} \sim n z^3. \quad (26)$$

Подстановка (26) в (25) дает искомую асимптотику высоких моментов интенсивности:

$$\ln \frac{\langle I^n \rangle}{n!} \sim \frac{2}{4-c} n \ln n - \frac{2(4-c^2)}{(4-c)c} n \ln z. \quad (27)$$

Соответствующая асимптотика функции распределения вероятности $P(I)$ имеет вид

$$\ln P \sim -\frac{1}{\alpha} (\alpha I)^\beta, \quad \beta = \frac{4-c}{6-c}. \quad (28)$$

Для колмогоровского спектра $\beta = 7/13$. Поскольку $\beta < 1$, мы приходим к выводу о более высокой вероятности больших значений $I$ в сравнении с экспоненциальным распределением $\exp(-I)$. Формула (28) находится в соответствии с результатами недавнего численного моделирования [17]. Отметим, что соотношение (28) означает существенную негауссовость волнового поля $\Psi$, хаотизованного рассеянием на турбулентных флуктуациях.

Асимптотика моментов (27) переходит в $\langle I^n \rangle = n!$ при $\alpha n \sim 1$ или $z \sim n^{c/(4-c^2)}$, как и должно быть. Аналогичное утверждение справедливо и для функции распределения, которая сшивается с экспонентой $\exp(-I)$ при $I \sim 1/\alpha$. Из (26) следует также характерный размер области на фронте волны, определяющей $I^n$ при $n \gg 1/\alpha$:

$$X \sim (\alpha n)^{1/(4-c)} z^{1/c+1}. \quad (29)$$

При $\alpha n \gg 1$ величина (29) оказывается параметрически больше, чем оценка $z^{1/c+1}$ для $X$ в Гауссовом режиме. Физически это означает, что для создания высоких значений интенсивности требуется собрать энергию с большой площади исходной волны. Из выражения (29) следует оценка для средних значений $\bar{\rho}$ (21)

$$\bar{\rho} \sim \frac{1}{n z^2} X^{3-c} \sim r_{ph} (n\alpha)^{-1/(4-c)}. \quad (30)$$

Эти средние малы в сравнении с характерной амплитудой флуктуаций: $\bar{\rho} \ll r_{ph}$, что оправдывает приближение (22). Заметим, однако, что перевальное действие (20) определяется именно этими средними, причем в действии (20) эта малость компенсируется большим числом слагаемых.

Найденная нами асимптотика моментов (27) ограничена сверху по $n$. Это ограничение определяется средним квадратом отброшенной нами флуктуационной составляющей взаимодействия пар между собой. Для него справедлива оценка

$$z^2 n^2 r_{ph}^4 X^{2(c-2)} \sim n \left(n^{c/4} \alpha\right)^{4/(4-c)}.$$

Малость этой величины по сравнению с основной величиной флуктуационного действия, которое оценивается как $\sim n$, приводит к условию применимости нашего подхода $n \ll \alpha^{-4/c}$. Обратный предельный случай требует специального анализа.

Мы теоретически установили, что при распространении лазерного луча в турбулентной среде на расстояниях, где существенную роль играет дифракция на случайных флуктуациях показателя преломления, вероятность аномально больших флуктуаций интенсивности существенно выше оценок, сделанных на основе Гауссовой статистики огибающей электромагнитной волны $\Psi$. Это связано с мультипликативностью показателя преломления в уравнении на огибающую и является универсальным свойством подобных стохастических систем. Мы нашли форму функции распределения вероятности аномально больших значений интенсивности. Наши выводы сделаны для простейшего случая начальной плоской волны, хотя сама схема анализа применима и к другим начальным формам лазерного луча. Результаты их исследования будут опубликованы в другом месте. Отдельного анализа требует случай чрезвычайно высоких значений интенсивности. Отдельного анализа требует также учет нелинейности (например, эффекта самофокусировки), которая может оказаться существенной для рассматриваемых нами больших интенсивностей электромагнитной волны.

Работа поддержана научной программой Национального Центра Физики и Математики, проект "Физика высоких плотностей энергии", этап 2023–2025. Авторы благодарят П. М. Лушникова за полезные обсуждения.

1. В. И. Татарский, *Распространение волн в турбулентной атмосфере*, Наука, М. (1967) [V. I. Tatarskii, *The Effects of the Turbulence Atmosphere on Wave Propagation*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem (1971)].
2. J. W. Goodman, *Statistical Properties of Laser Speckle Pattern*, in *Laser Speckle and Related Phenomena*, ed. by J. C. Dainty, Springer-Verlag, Berlin (1975).
3. С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, *Введение в статистическую радиофизику, ч. II, Случайные поля*, Физматлит, М. (1978) [M. S. Rytov,

Yu. A. Kravtsov, and V. I. Tatarskii, *Principles of Statistical Radiophysics 4: Wave Propagation through Random Media*, Springer-Verlag, Berlin (1989)].

4. *Laser Beam Propagation in the Atmosphere*, ed. by J. W. Strohbehn, Springer, N.Y. (1978).
5. L. C. Andrews and R. L. Phillips, *Laser Beam Propagation Through Random Media*, Press Monograph Series, PM**53** (1998).
6. M. A. Vorontsov, G. W. Carhart, V. S. R. Gudimetla, T. Weyrauch, E. Stevenson, S. L. Lachinova, L. A. Beresnev, J. Liu, K. Rehder, and J. F. Riker, *Proc. 2010 AMOS Conf.* (2010).
7. M. A. Vorontsov, V. R. Gudimetla, G. W. Carhart, T. Weyrauch, S. L. Lachinova, E. Polnau, J. R. L. A. Beresnev, J. Liu, and J. F. Riker, *Proc. 2011 AMOS Conf.* (2011).
8. S. L. Lachinova and M. A. Vorontsov, J. Opt. **18**, 025608 (2016).
9. П. М. Лушников, Н. Владимирова, Письма в ЖЭТФ **108**, 611 (2018) [JETP Lett. **108**, 571 (2018)].
10. T. Fahey, M. Islam, A. Gardi, and R. Sabatini, Atmosphere **12**, 918 (2021).
11. F. Evers and A. D. Mirlin, Rev. Mod. Phys. **80**, 1355 (2008).
12. В. И. Татарский, ЖЭТФ **56**, 2106 (1969) [Sov. Phys. JETP **29**, 1133 (1969)].
13. В. Н. Заворотный, В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ **73**, 481 (1977) [Sov. Phys. JETP **46**, 252 (1977)].
14. I. Kolokolov, V. Lebedev, and P. Lushnikov, Phys. Rev. E **101**, 042137 (2020).
15. M. I. Charnotskii, Waves in Random Media **4**, 243 (1994).
16. С. Вайнберг, *Квантовая теория поля*, Физматлит, М. (2015), т. 2 [S. Weinberg, *The quantum theory of fields*, Cambridge University Press, Cambridge (2001), v. 2].
17. П. М. Лушников, частное сообщение. Личная страница: https://math.unm.edu/ plushnik/.